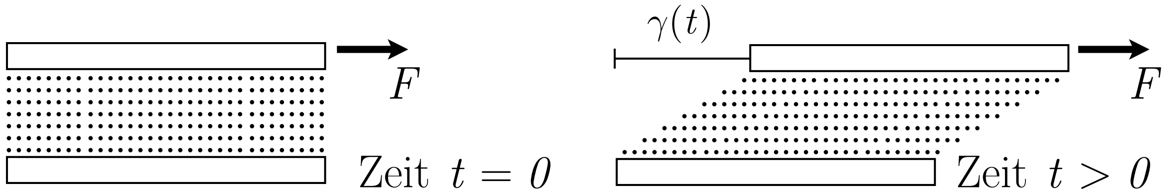
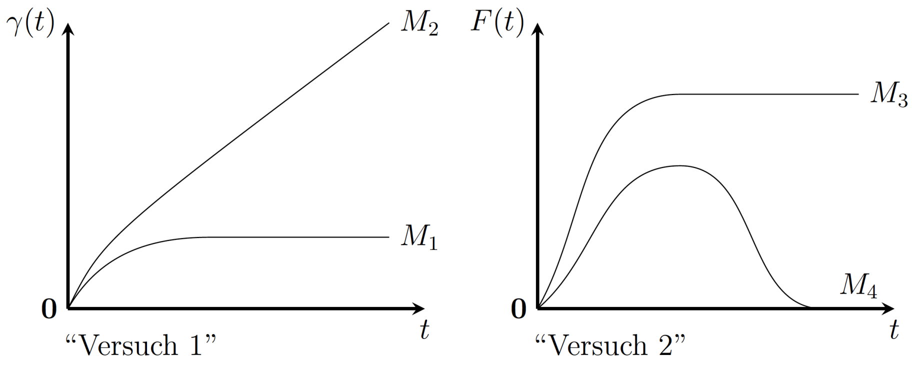
Aufgabe 1 (Bestimmung von Materialien anhand ihrer Eigenschaften) (4 Punkte)

Ein Material wird zwischen zwei gegeneinander verschiebbaren Platten gelagert. Dabei haftet das Material an beiden Platten. Die Anordnung sei für Zeiten $t < 0$ in Ruhe. Ab $t = 0$ wird die obere Platte mit konstanter horizontaler Kraft F belastet. Mit $\gamma(t)$ bezeichnen wir die Länge der Verschiebung der oberen Platte zum Zeitpunkt t.



Für zwei verschiedene Materialien M_1 und M_2 ist das Ergebnis des Versuches in das Diagramm "Versuch 1" eingezeichnet. In einem zweiten Experiment wird die obere Platte ab dem Zeitpunkt $t = 0$ so lange verschoben, bis $\gamma(t)$ konstant $1cm$ beträgt. Die dafür benötigte Kraft zum Zeitpunkt t wird mit $F(t)$ bezeichnet. Für zwei neue Materialien M_3 und M_4 ist das Ergebnis des Versuches in das Diagramm "Versuch 2" eingezeichnet.



Welche Materialien sind Festkörper und welche Fluide? Begründen Sie.

Aufgabe 2 (Satz von Radon–Nikodym) (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Variante des Satzes von Radon–Nikodym:
Seien $\mu, \nu : X \to [0, \infty)$ endliche Maße auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A})$, sodass $\nu \ll \mu$, d.h. ν ist absolutstetig bezüglich μ. Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty)$, so dass

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst die folgende Aussage:
Sind $\mu, \nu : X \to [0, \infty)$ endliche Maße auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A})$, sodass $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to [0, 1]$, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Sie dürfen ohne Beweis den Darstellungssatz von Riesz verwenden sowie die Tatsache, dass aus $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ folgt, dass $\int_X f \, d\nu \leq \int_X f \, d\mu$ für alle $f \in L^1(\mu)$.