Mathematische Modellierung, Übungsblatt 3 SS 2024

Prof. Dr. M. Růžička, M. Sc. S. Andres **Abgabetermin:** 6. Mai 2024

Aufgabe 1 (Zwei Deformationen und ihre Deformationsgradienten) (5 Punkte)

Wir betrachten einen Körper $\mathcal{B}$, welcher in Referenzkoordinaten (zu einer gegebenen Referenzkonfiguration) durch die Menge $[0,1]^3$ dargestellt ist. Zu $\kappa > 0$ betrachten wir die folgenden Deformationen:

(i) $\chi_1 : [0,1]^3 \to \mathcal{B}_{\chi_1}$, für alle $\mathbf{X} := (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)^\top \in [0,1]^3$ definiert durch

$$\chi_1(\mathbf{X}) := \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1, \\ \mathrm{X}_2 - \kappa \mathrm{X}_1, \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) $\chi_2 : [0,1]^3 \to \mathcal{B}_{\chi_2}$, für alle $\mathbf{X} := (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)^\top \in [0,1]^3$ definiert durch

$$\chi_2(\mathbf{X}) := \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 + \kappa \mathrm{X}_1, \\ \mathrm{X}_2 + \kappa \mathrm{X}_2, \\ \mathrm{X}_3 + \kappa \mathrm{X}_3 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die Mengen $\mathcal{B}_{\chi_1}$ und $\mathcal{B}_{\chi_2}$ für ein $\kappa > 0$ Ihrer Wahl und berechnen Sie die Deformationsgradienten dieser Deformationen.

Aufgabe 2 (Eine Bewegung) (5 Punkte)

Wir betrachten einen Körper $\mathcal{B}_0$, dessen Referenzkonfiguration durch $[0,1]^3$ gegeben ist. Weiter sei die Bewegung durch die Parameterfamilie $\chi(t,\cdot) : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_t,\ t \in [0,2]$, für alle $\mathbf{X} := (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)^\top \in \mathcal{B}_0$ und $t \in [0,2]$ definiert durch

$$\chi(t, \mathbf{X}) := \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 e^t + \mathrm{X}_3(e^t - 1) \\ \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3(e^t - e^{-t}) \\ \mathrm{X}_3 e^t \end{pmatrix},$$

gegeben. Skizzieren Sie $\mathcal{B}_t$ für unterschiedliche (mindestens zwei) Zeitpunkte $t \in [0,2]$. Prüfen Sie, ob die Jacobi–Determinante von Null verschieden ist. Begründen Sie außerdem, warum die Inversen $\chi_t^{-1} : \mathcal{B}_t \to \mathcal{B}_0,\ t \in [0,2]$, wobei $\chi_t(\mathbf{X}) := \chi(t, \mathbf{X}),\ t \in [0,2]$, existieren und bestimmen Sie diese Inversen explizit.