Mathematische Modellierung, Übungsblatt 4 SS 2024

Prof. Dr. M. Růžička, M. Sc. S. Andres **Abgabetermin:** 13. Mai 2024

Aufgabe 1 (Polarzerlegung) (7 Punkte)

Sei $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine invertierbare Matrix mit $\det(\mathbf{F}) > 0$. Wir zeigen die Existenz einer Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$, wobei $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit sind sowie $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ und $\det(\mathbf{R}) = 1$. Beweisen Sie dazu die Punkte **(i)**–**(iv)**:

(i) Zu einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ existiert eine eindeutige "Wurzel", d.h. eine symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Wurzel einer symmetrischen, positiv definiten Matrix eindeutig ist.

Tipp: Diagonalisieren Sie dafür die Matrix und wenden Sie die Wurzel auf die Einträge der Diagonalen an.

(ii) $\mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ ist symmetrisch und positiv definit.

Wegen **(i)**–**(ii)** dürfen wir $\mathbf{U} := (\mathbf{F}^\top \mathbf{F})^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{V} := (\mathbf{F}\mathbf{F}^\top)^{\frac{1}{2}}$ und $\mathbf{R} := \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ definieren.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbb{I}_3$ und $\det(\mathbf{R}) = 1$, wobei $\mathbb{I}_3 = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$.

(iv) Zeigen Sie, dass $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$.

Aufgabe 2 (Materielle und partielle Zeitableitung) (3 Punkte)

Die Referenzkonfiguration eines Körpers $\mathcal{B}_0$ sei durch $[0,1]^3$ gegeben. Weiter sei die Bewegung des Körpers durch die Parameterfamilie $\chi(t,\cdot) : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_t,\ t \in [0,2]$, definiert durch

$$\chi(t, \mathbf{X}) := \begin{pmatrix} (t+1)\mathrm{X}_1 \\ (t+1)\mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix},$$

gegeben. Skizzieren Sie den Körper $\mathcal{B}_t$ für unterschiedliche (mindestens zwei) Zeitpunkte $t \in [0, 2]$. Wir betrachten eine physikalische Größe G, welche in Lagrangekoordinaten durch die Funktion $\hat{G} : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\hat{G}(t, \mathbf{X}) := \begin{pmatrix} (t+1)\mathrm{X}_1 \\ 2(t+1)\mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Geben Sie die Größe G in Eulerkoordinaten an. Berechnen Sie weiter die materielle Zeitableitung $\dot{G}$ sowie die partielle Zeitableitung $\partial_t G$.