Aufgabe 1 (Bahn- und Stromlinien) (5 Punkte)

Sei $\chi : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$ eine hinreichend glatte Bewegung eines Fluides. Diese nennen wir Strömung. Eine *Bahnlinie* (auch *Trajektorie* genannt) $\{\chi(t, \mathbf{X}_0) \mid t \in I\}$ zeichnet den Pfad eines Materialpunktes $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{B}_0$ unter der Strömung nach. Zu einem festen Zeitpunkt $t \in I$ sind *Stromlinien* die Integralkurven des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung, d.h. eine Kurve $\mathbf{c}_t : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ heißt Stromlinie, falls Sie eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{c}_t(s)}{ds} = \mathbf{v}(t, \mathbf{c}_t(s)) \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad \text{für alle } s \in J$$

ist. Eine Strömung, deren Geschwindigkeit $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$ erfüllt, wird *stationär* genannt.

Zeigen Sie, dass bei einer stationären Bewegung (und einer Identifikation zwischen I und J) Stromlinien und Bahnlinien übereinstimmen. Gilt auch die Umkehrung?

Tipp: Betrachten Sie für die Umkehrung die Bewegung $\chi : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $\chi(t, \mathbf{X}) := \mathbf{X} + \frac{\kappa}{2} t^2 \mathbf{e}$ für alle $(t, \mathbf{X})^\top \in I \times \mathcal{B}_0$, wobei $\kappa > 0$ und $|\mathbf{e}| = 1$.

Aufgabe 2 (Positive, konstante Dichte $\Rightarrow$ Inkompressibilität) (1 Punkt)

Sei $\chi : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$ die Bewegung eines Körpers, dessen (positive) Dichte konstant ist. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{v} : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$ der Bewegung

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } I \times \mathcal{B}_0$$

erfüllt.

Aufgabe 3 (Gradient obj. Vektoren und mat. Zeitabl. objektiver Größen) (4 Punkte)

Seien die Größen b (skalarwertig), $\mathbf{u}$ (vektorwertig) und $\mathbf{S}$ (tensorwertig) objektiv. Leiten Sie eine Formel für den Gradienten $\nabla \mathbf{u}$, sowie Formeln für die materiellen Zeitableitungen von b, $\mathbf{u}$ und $\mathbf{S}$ her. Welche Ableitungen sind immer noch objektiv?

Bonusaufgabe (Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten) (2* Bonuspunkte)

Für den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten gelte die folgende Zerlegung

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W},$$

wobei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ und $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{anti}}$.
Zeigen Sie, dass im Sonderfall einer reinen Starrkörperbewegung, d.h. $\chi : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\chi(t, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X} + \mathbf{c}(t)$ für alle $(t, \mathbf{X})^\top \in I \times \mathcal{B}_0$, wobei $\mathbf{Q} \in C^1(I, \mathbb{R}^{3\times 3})$ mit $\mathbf{Q}(t) \in \mathrm{O}(3)$ für alle $t \in I$ und $\mathbf{c} \in C^1(I, \mathbb{R}^3)$, gilt:

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}_{3\times 3} \quad \text{und} \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{R}^{3\times 3} = \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}} \bigoplus \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{anti}}$, d.h. der Raum $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die direkte Summe des Raumes der symmetrischen Matrizen $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ und des Raumes der anti-symmetrischen Matrizen $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{anti}}$.