Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $V_0 \subseteq \mathcal{B}_0$ und $V_t = \chi_t(V_0)$ eine Bewegung eines Teils des Körpers $\mathcal{B}$. Weiter sei ρ die Dichte des Körpers, G eine skalare Größe und $\mathbf{u}$ eine vektorwertige Größe. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho G \, dx = \int_{V_t} \rho \dot{G} \, dx,$$
$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho \mathbf{u} \, dx = \int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{u}} \, dx.$$

Aufgabe 2 (Differentiationssatz von Lebesgue) (4 Punkte)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B_r^d(x)|}\int_{B_r^d(x)} f(y)\,dy - f(x)\right| \le \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r^d(x)|}\int_{B_r^d(x)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
Betrachten Sie das Funktional

$$L(x) := \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r^d(x)|}\int_{B_r^d(x)} |f(y)-f(x)| \; dy,$$

sowie den Hardy–Littlewood Maximaloperator $M : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$M(f)(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r^d(x)|}\int_{B_r^d(x)} |f(y)| \; dy$$

und beweisen Sie für eine passend gewählte Funktionenfolge $(f_\delta)_{\delta>0}$ die Abschätzung

$$L(x) \le M(f-f_\delta)(x) + |f_\delta(x) - f(x)|\,.$$

Folgern Sie daraus, dass die Menge $E := \{L > 0\}$ Maß Null hat.

Tipp: Verwenden Sie ohne Beweis, dass der Hardy–Littlewood Maximaloperator $M : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, wobei $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ die Menge der (Lebesgue–)messbaren Funktionen ist, L^1–L^1–beschränkt ist, d.h. es existiert eine Konstante $c > 0$, sodass

$$|\{M(f) > \lambda\}| \le \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $\lambda > 0$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\chi : I \times \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}^3$ die Bewegung eines Körpers. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\rho\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}),$$

welche die Dichte ρ, die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}$ in Relation setzt, gilt.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1 und Aufgabe 2.