Mathematische Modellierung, Übungsblatt 7 SS 2024

Prof. Dr. M. Růžička, M. Sc. S. Andres **Abgabetermin:** 10. Juni 2024

Aufgabe 1: Bernoulli's Theorem (5 Punkte)

Beweisen Sie für einen stationären Strömung mit $\mathbf{T} = -p\mathbf{Id}$ und $\mathbf{b} = -\nabla\phi$ die Gleichung

$$0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \phi \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla p}{\rho},$$

wobei der Druck $p(t, \mathbf{X})$ und das potential $\phi(t, \mathbf{X})$ reelwertige stetig differenzierbare Funktionen sind. Überlegen Sie sich zuvor:

$$(\nabla \mathbf{v})\,\mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) + 2\mathbf{W}\mathbf{v}$$

und folgern Sie daraus, dass

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + 2\mathbf{W}\mathbf{v}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir definieren die (kontravarianten) Oldroyd–Ableitungen durch

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{u}} := \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{L}\mathbf{u}, \qquad \overset{\triangledown}{\mathbf{T}} := \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L}^\top.$$

Zeigen Sie, dass die Oldroyd–Ableitungen $\overset{\triangledown}{\mathbf{u}}$ und $\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}$ objektiv sind, falls jeweils $\mathbf{u}$ und $\mathbf{T}$ objektiv sind.