Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die Exponentialfunktion einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lässt sich als Grenzwert der Folge

$$(\mathbf{S}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3},$$

d.h.

$$\exp(\mathbf{A}) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

definieren. Zeigen Sie:

(i) Gilt $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ für zwei quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so gilt:

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B}) \quad \text{ in } \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(ii) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{anti}}$ (antisymmetrisch), so ist $\exp(\mathbf{A}) \in \mathrm{O}(3)$ (orthogonal).

(iii) Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $f := (t \mapsto \exp(t\mathbf{A})) \in C^1(\mathbb{R})^{3\times 3}$ mit

$$f'(t) = \frac{d}{ds}\big[\exp(s\mathbf{A})\big]_{s=t} = \mathbf{A} \exp(t\mathbf{A}) \quad \text{ in } \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ (symmetrisch), sodass $\mathbf{WQ} = \mathbf{QW}$ für alle $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{anti}}$ (antisymmetrisch). Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\mathbf{Q} = \lambda \mathbb{I}_3$.