Mathematische Modellierung, Übungsblatt 10 SS 2024

Prof. Dr. M. Růžička, M. Sc. S. Andres **Abgabetermin:** 1. Juli 2024

Definition: (Legendre–Transformation) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $z \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $f(\cdot, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\partial_1 f(\cdot, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar ist. Die Inverse bezeichnen wir für alle $z \in \mathbb{R}^d$ mit $(\partial_1 f)^{-1}(\cdot, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion $f^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, für alle $(u, z)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$f^*(u, z) := f((\partial_1 f)^{-1}(u, z), z) - (\partial_1 f)^{-1}(u, z)u,$$

die **Legendre–Transformierte** von f.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $z \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $f(\cdot, z) \in C^2(\mathbb{R})$ eine strikt konvexe Funktion ist. Zeigen Sie, dass $(f^*)^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist und

$$(f^*)^*(u, z) = f(-u, z)$$

für alle $(u, z)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Rechnen Sie nach, dass die freie Energie $\psi(\theta, \gamma_\alpha)$ die Legendre–Transformierte der inneren Energie $e(\eta, \gamma_\alpha)$ ist.