Mathematische Modellierung, Übungsblatt 11 SS 2024

Prof. Dr. M. Růžička, M. Sc. S. Andres **Abgabetermin:** 8. Juli 2024

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wir nehmen an, dass die innere Energie eine konvexe Funktion von der Entropie η und dem spezifischen Volumen $\tau = \frac{1}{\rho}$ ist, d.h. $e = e(\eta, \tau)$ erfüllt aufgrund der positiven Semidefinitheit der Hessematrix

$$\partial_\tau^2 e \geq 0, \quad \partial_\eta^2 e \geq 0, \quad \partial_\tau^2 e \partial_\eta^2 e - (\partial_\tau \partial_\eta e)^2 \geq 0.$$

Leiten Sie daraus die Ungleichungen

$$\frac{2\partial_\rho e}{\rho} + \partial_\rho^2 e \geq 0, \quad \partial_\eta^2 e \geq 0, \quad \left(\frac{2\partial_\rho e}{\rho} + \partial_\rho^2 e\right)\partial_\eta^2 e - (\partial_\rho \partial_\eta e)^2 \geq 0$$

her. Folgern Sie schließlich für die freie Energie $\psi(\theta, \tau)$ die Ungleichungen

$$\frac{2\partial_\rho \psi}{\rho} + \partial_\rho^2 \psi \geq 0, \quad \partial_\theta^2 \psi \leq 0, \quad \left(\frac{2\partial_\rho \psi}{\rho} + \partial_\rho^2 \psi\right)\partial_\theta^2 \psi - (\partial_\rho \partial_\theta \psi)^2 \leq 0.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Analog zu Inkompressibilität kann es vorkommen, dass ein Körper in bestimmte Richtungen oder Bereiche nicht ausgedehnt werden kann. Dies schlägt sich auch in einer Zwangsbedingung $\lambda(\mathbf{F}) = 0$ für die Bewegung nieder. Hier ist λ ebenfalls eine skalarwertige Funktion.
Sei nun ein Körper $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, welcher sich nicht in Richtung der X_3-Achse ausdehnen kann (vgl. Skizze unten). Die Zwangsbedingung λ ist in diesem Fall gegeben durch

$$\lambda(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Berechnen Sie den zugehörigen Zwangsspannungstensor N.