Aufgabe 1 (ε–Young'sche Ungleichung) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ und $q \in (1, \infty)$

$$ab \leq \varepsilon a^q + c_q(\varepsilon) b^{q'},$$

wobei $q' = \frac{q}{q-1}$ und $c_q(\varepsilon) := \frac{(q\varepsilon)^{1-q'}}{q'}$, gilt. Zeigen Sie dazu zunächst den Fall $\varepsilon = \frac{1}{q}$.

Aufgabe 2 (A-priori Abschätzung für die q–Navier–Stokes–Gleichungen) (7 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet.

Wir betrachten die stationären q–Navier–Stokes–Gleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{T}^D(\mathbf{Du})) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \pi = \operatorname{div}(\mathbf{F}) \qquad & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \qquad & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega})^{d\times d}$ mit $\mathbf{F}(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\text{sym}}$ für alle $x \in \Omega$ und

$$\mathbf{T}^D(\mathbf{A}) = \mu_0(\delta + |\mathbf{A}|)^{q-2}\mathbf{A} \qquad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\text{sym}},$$

wobei $\mu_0 > 0$, $\delta \geq 0$ und $q \in (1, \infty)$. Eine schwache Formulierung von (1) lautet: Gesucht sind ein π und ein $\mathbf{u}$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \qquad & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

sodass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,q}(\Omega)^d$ gilt

$$\int_\Omega \mathbf{T}^D(\mathbf{Du}) : \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi} - \pi \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx. \tag{2}$$

Folgern Sie für eine Lösung $\pi \in C^0(\overline{\Omega})$ und $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega})^d \cap C_0^0(\Omega)^d$ von (2), dass es ein $c = c(p, \mu_0, \mathbf{F}, q, \delta) > 0$ gibt, sodass

$$\int_\Omega |(\mathbf{Du})(x)|^q \, dx \leq c. \tag{3}$$

Hier bezeichnet $C_0^0(\Omega)$ die Menge aller stetigen Funktionen $\mathbf{v}$ auf Ω deren Spur verschwindet, das heißt $\mathbf{v}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0}$.
Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor:

1. Schritt: Folgern Sie aus (2), dass

$$\int_\Omega \mathbf{T}^D(\mathbf{Du}) : \mathbf{Du} \, dx = -\int_\Omega \mathbf{F} : \mathbf{Du} \, dx.$$

2. Schritt: Zeigen Sie, dass

$$-\int_\Omega \mathbf{F} : \mathbf{Du}\, dx \leq c_q(\varepsilon) \int_\Omega |\mathbf{F}|^{q'}\, dx + \varepsilon \int_\Omega |\mathbf{Du}|^q\, dx,$$

wobei $c_q(\varepsilon) := \frac{(q\varepsilon)^{1-q'}}{q'}$ für alle $\varepsilon > 0$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1.

3. Schritt: Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega \mathbf{T}^D(\mathbf{Du}) : \mathbf{Du}\, dx \geq c_0 \int_\Omega |\mathbf{Du}|^q\, dx - c_1|\Omega|$$

für Konstanten $c_0, c_1 > 0$.

Tipp: Zeigen Sie, dass es Konstanten $c_0, c_1 > 0$ gibt, sodass

$$(\delta + a)^{q-2} a^2 \geq c_0 a^q - c_1 \text{ für alle } a \geq 0.$$

Unterscheiden Sie hierzu die Fälle $q \in (1, 2)$ und $q \in [2, \infty)$.

4. Schritt: Zeigen Sie, dass es ein $c = c(p, \mu_0, \mathbf{F}, q, \delta) > 0$ gibt, sodass (3) gilt.

Tipp: Kombinieren Sie die Schritte 1 bis 3 und wählen Sie $\varepsilon > 0$ geeignet.