

Mathematische Modellierung

Sommersemester 2024

Prof. Dr. Michael Růžička

Inhaltsverzeichnis

Notation und Bezeichnungen

Wenn wir von einem Vektor bzw. Tensor sprechen, ist typischerweise ein (orts- und ggf. zeitabhängiges, nicht notwendigerweise konstantes) Vektor- bzw. Tensorfeld gemeint. Genauso meint "ein Skalar" eine (orts- und ggf. zeitabhängige) reellwertige Größe (also eine Funktion). Wir unterscheiden hier nicht zwischen Tensoren 2. Ordnung und Matrizen. Die verwendete Notation gibt bereits Aufschluss über die Art eines mathematischen Objekts: Vektoren werden ***kursiv und fett*** geschrieben, Tensoren **fett und nicht kursiv**, Skalare, Komponenten eines Vektors und weitere Objekte wie z.B. Flächen werden *kursiv* dargestellt. Speziell unterscheiden wir in der Notation zwischen einem Punkt P und seinen Koordinaten \mathbf{X} im euklidischen Raum (nur die Koordinaten, nicht der Punkt selbst sind vektorwertig).

Wir benutzen die *Einsteinsche Summenkonvention*: wenn ein Index in einem Term sowohl oben als auch unten auftritt, wird über diesen Index summiert. Sowohl für das Skalarprodukt zweier Vektoren, als auch für das Produkt zwischen Matrizen oder Matrix und Vektor wird kein Malpunkt notiert. Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist also definiert

$$\mathbf{u}\mathbf{v} := \mathbf{u}^\top \mathbf{v} := u_i v^i := \sum_{i=1}^3 u_i v^i, \quad \mathbf{A}\mathbf{v} := A_j^i v^j.$$

Für zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ haben wir außerdem das innere Produkt $\mathbf{A} : \mathbf{B} := \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}) = A_i^j B_i^j$.

Außerdem gehen wir in der Modellierung davon aus, dass alle behandelten Größen messbar und hinreichend glatt sind.

Mit den meisten Variablen werden physikalische Größen bezeichnet, die im Unterschied zu Variablen in der Mathematik nur einmal und nicht in jedem Satz von neuem definiert werden. Um die Übersicht zu erleichtern, werden hier die verwendeten physikalischen Größen aufgelistet. Allerdings lassen sich die meisten dieser Größen nicht durch eine geschlossene Formel definieren, sondern es ist eine aufwendigere Konstruktion nötig, weshalb wir in diesen Fällen nur auf die entsprechenden Abschnitte verweisen können.

Variable	Begriff	Definition	definiert in
\mathbf{a}	Beschleunigung	$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	Def. 2.7
\mathbf{b}	spezifische äußere Volumenkraft		Abschnitt 3.2
γ_α	thermodynamischer Unterzustand		Abschnitt 3.5
\mathbf{f}	Kraft		Einl., Abschn. 1.1
\mathbf{q}	Wärmeflussvektor		Satz 4.6
\mathbf{t}	Spannungsvektor		Satz 2.3
τ_α	thermodynamische Spannungen		Abschnitt 3.5
\mathbf{v}	Geschwindigkeit	$\mathbf{v} := \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}(t, \mathbf{X})$	Def. 2.6
\mathbf{x}	Eulerkoordinaten (eines Materialpunkts)	$\mathbf{x} := \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})$	Abschnitt 2.2
$\boldsymbol{\chi}$	Bewegung eines Körpers		Def. 2.1
\mathbf{D}	symm. Anteil des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}		Def. 2.8
\mathbf{F}	Deformationsgradient	$\mathbf{F} := \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\chi} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x}$	Def. 1.7
$\widehat{\mathbf{G}}, \widetilde{\mathbf{G}}$	Lagrange- bzw. Eulerbeschreibung einer Größe \mathbf{G}	$\widehat{\mathbf{G}}(t, P) = \widetilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{X}) = \widetilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x})$	Abschnitt 2.2
\mathbf{L}	Geschwindigkeitsgradient	$\mathbf{L} := \nabla \mathbf{v}$	Def. 2.8
\mathbf{T}	Spannungstensor		Satz 4.6
\mathbf{W}	antisymm. Anteil des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}		Def. 2.8
\mathbf{X}	Lagrangekoordinaten (eines Materialpunkts)	$\mathbf{X} := \boldsymbol{\chi}(0, P)$	Abschnitt 2.2

Variable	Begriff	Definition	definiert in
c_p	spez. Wärme bei konstantem Druck		Def. 6.24
c_V	spez. Wärme bei konstantem Volumen		Def. 6.24
e	spezifische innere Energie	innere Energie pro Masse	Abschnitt 3.2
h	Wärmefluss		Satz 2.4
p	thermodynamischer Druck	$p := \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}$	Abschnitt 3.6
\mathcal{B}	Körper		Abschnitt 2.1
E	Energie		Prinzip 2.1
H	zugeführte Wärme		Prinzip 2.1
\mathcal{H}	totale Entropie	$\mathcal{H}(V_t) := \int_{V_t} \rho \eta dx$	Def. 5.16
M	Masse		Einl., Absch. 1.2
P	Materialpunkt, aber auch Leistung		Einl., Def. 2.1 bzw. Prinzip 2.1
Q	nicht-mechanischer Energiezuwachs		Abschnitt 3.5
$R, (R_m)$	(universelle) Gaskonstante		Abschnitt 3.6
\mathcal{W}	Newtonsche Raum-Zeit		Abschnitt 2.1
α	Wärmeausdehnungskoeffizient	$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}}_{=:-\alpha}$	Einl., (3.1)
β	isothermaler Kompressibilitätskoeffizient	$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dp}{dt}}_{=:\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$	Einl., (3.1)
γ	Verhältnis der spez. Wärmekoeffizienten	$\gamma := \frac{c_p}{c_V}$	Def. 6.24
η	Entropie		Abschnitt 3.5
κ	Wärmeleitkoeffizient	$\mathbf{q} = \kappa \nabla \theta$	Abschnitt 6.23
ζ	freie Enthalpie	$\xi := \chi - \eta \theta$	Abschn. 3.5, (5.9)
θ	(absolute) Temperatur		Abschnitt 3.5
κ	Referenzkonfiguration eines Körpers		Abschnitt 2.1
μ	Viskosität		Einl., Absch. 1.3
ν	kinematische Viskosität	$\nu := \frac{\mu}{\rho}$	Einl., Absch. 1.3
ρ	Dichte	$M(V) =: \int_V \rho dx$	Einl., Absch. 1.2
χ	Enthalpie	$\chi := e - \sum \tau_\alpha \gamma_\alpha$	Absch. 3.5, (5.9)
ψ	freie Energie	$\psi := e - \eta \theta$	Absch. 3.5, (5.9)
Φ	Bezugssystem		Abschnitt 2.1

Kapitel 1

Einleitung

In der Vorlesung wollen wir Modellgleichungen herleiten, die physikalische Vorgänge wie z.B.

- Deformation einer Saite, einer Membran oder eines elastischen Körpers,
- Strömung von Wasser,
- Wärmeleitung,
- Umströmung von Tragflächen,

beschreiben. Dies führt auf Anfangs-Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen (PDE's). Prototypen, die die Entwicklung der Theorie der PDE's entscheidend beeinflusst haben, sind

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{elliptisch,} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{parabolisch,} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{hyperbolisch.} \end{array}$$

Unser Interesse an diesen Gleichungen kommt daher, dass sie die einfachsten Approximationen für eine Vielzahl von Vorgängen in der Natur sind. Ihr Verständnis trägt zur besseren Einsicht in die Vorgänge selbst bei.

Unser Ziel ist die Herleitung der "allgemeinsten" Gleichungen (wir vernachlässigen chemische Prozesse (Massenerzeugung), elektromagnetische Vorgänge, relativistische Effekte), die die Bewegung von deformierbaren Körpern beschreiben, aus wenigen Grundprinzipien: der *Massenerhaltung* (braucht man eigentlich gar nicht), des ersten und zweiten Hauptsatzes der *Thermodynamik*, sowie aus den Prinzipien der *Objektivität* und *Forminvarianz*.

Hinzu treten *Materialeigenschaften* wie z.B. das Hookesche Gesetz, das besagt, dass die Spannung τ proportional zur relativen Ausdehnung ist, d.h.

$$\tau \sim \frac{\Delta l}{l}.$$

Solche linearen Gesetze besitzen jedoch oftmals nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich.

Vereinfachungen der Gleichungen treten auf, wenn sich das betrachtete System in einem stationären Zustand befindet oder wenn nur kleine Geschwindigkeiten bzw. Geschwindigkeitsänderungen auftreten etc.

Unser Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung von Fluiden, allerdings gelten die meisten Überlegungen auch für Festkörper. Im Rest der Einleitung wollen wir einige Betrachtungen zur Gültigkeit und Anwendbarkeit der zu entwickelnden Theorie machen und einige wichtige Begriffe intuitiv einführen.

1.1 Materialverhalten

Eine für das mechanische Verhalten eines Objekts wichtige Eigenschaft ist sein Aggregatzustand. Wir versuchen nun, Kriterien zu finden, wann ein Objekt fest/ flüssig/ gasförmig ist. Intuitiv gelingt uns das einfach: Ein Festkörper hat ein bestimmtes Volumen und eine Form, während eine Flüssigkeit zwar ein bestimmtes Volumen, aber keine bestimmte Form hat (sie passt sich ihrer Umgebung an). Dagegen sind weder Volumen noch Form eines Gases fest. Diese makroskopische Charakterisierung ist allerdings unbrauchbar für theoretische Untersuchungen, die das unterschiedliche Verhalten der Materialien gerade wiedergeben sollen. Wir verwenden daher einen anderen Ansatz.

Dafür wählen wir ein Testvolumen V , mit einem Punkt P auf der Oberfläche und einer Kraft \mathbf{f} , die in P auf unser Objekt wirkt. Wir zerlegen $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t$ in Anteile, die normal bzw. tangential zum Rand ∂V stehen. Festkörper und Fluide (Flüssigkeiten und Gase) unterscheiden sich nun in ihrer Reaktion auf die Tangentialkraft: Ein Festkörper wird deformiert und kommt evtl. in ein neues statisches Gleichgewicht. Ein Fluid reagiert dagegen mit kontinuierlicher Veränderung von Volumen und Form, ist also in steter Bewegung. Wenn sich also ein Fluid in einem statischen Gleichgewicht befindet, dann wirken nur Normalkräfte. Flüssigkeiten und Gase unterscheiden sich in ihrer Reaktion auf Normalkräfte, d.h. auf Druck: Gase reagieren kompressibel, d.h. ihr Volumen ändert sich. Flüssigkeiten hingegen sind (fast) inkompressibel, ihr Volumen ändert sich nicht. Da diese Unterscheidung des unterschiedlichen Materialverhaltens ohne ein Studieren der mikroskopischen

Eigenschaften stattfinden, nennen wir dies einen *makroskopischen Zugang*. Dieser hat den Vorteil, dass er es erlaubt, mit makroskopisch mess- und beobachtbaren Größen zu arbeiten.

Nichtsdestotrotz lassen sich die festgestellten Unterschiede zwischen Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen als Manifestationen der unterschiedlichen mikroskopischen Eigenschaften auffassen. Und zwar bestehen Materialien aus einer Vielzahl von Molekülen, die im Falle eines Festkörpers in einem nicht unbedingt regelmäßigen Gitter geordnet sind, feste Abstände und wenig Bewegungsfreiheit besitzen. In Flüssigkeiten sind die Moleküle auch geordnet, haben aber schon mehr Bewegungsfreiheit, denn die intermolekulare Kraft (und damit die Ordnung) nimmt mit zunehmendem Abstand der Moleküle ab. In Gasen bewegen sich die Moleküle sehr frei, es findet fast keine Interaktion zwischen ihnen statt.

Nachteil des makroskopischen Zugangs ist, dass Vorgänge auf molekularer- und intermolekularer Ebene (z.B. intermolekulare Kräfte und Stöße zwischen Teilchen) nicht dargestellt werden können. Deshalb müssen einige physikalische Grundprinzipien, wie z.B. das Energieerhaltungsgesetz, als Axiom/Annahme formuliert werden. Auf niedrigeren Modellebenen, d.h. wenn die intermolekulare Ebene im Modell berücksichtigt wird, können diese Prinzipien bewiesen werden.

Desweiteren sei noch darauf hingewiesen, dass unsere Begriffe fest/ flüssig/ gasförmig (so wie all unsere Untersuchungen) auch von den Zeitskalen abhängen, auf denen wir unser Material beobachten. So gibt es "langsame" Prozesse wie die Bewegung eines (an sich aus Eis bestehenden, also festen) Gletschers, die nicht recht zum typischen Verhalten eines Festkörpers passen. Auf kurzen Zeitskalen, z.B. wenn ein Wanderschuh auf die Gletscheroberfläche trifft, verhält er sich sehr wohl wie ein gewöhnlicher Festkörper.

1.2 Die Kontinuumshypothese

Ein Material besteht aus einer enormen Anzahl von Molekülen, die sich in permanenter Bewegung befinden. Da wir in der Kontinuumsmechanik nicht das Verhalten jedes einzelnen Moleküls modellieren möchten, ist hier der Begriff des "Materialpunkts" zentral. Bei diesem handelt es sich um eine extrem kleine Menge von Material, so klein, dass wir sie als Punkt betrachten können. Dieser Ansatz stimmt offenbar nicht mit der Realität überein, sondern ist ein vereinfachtes Modell, das aber gute Ergebnisse liefert.

Um diesen Begriff zu entwickeln, betrachten wir ein Fluid und wollen dessen Dichte in einem Punkt P , den das Fluid umschließt, bestimmen. Sei dafür V ein kleines Volumen, das P umschließt, und $M(V)$ die Masse dieses

Volumens (alle diese Größen seien messbar). Wir definieren die *gemittelte Dichte*

$$\bar{\rho} := \frac{M(V)}{V}.$$

Eine Vielzahl von Experimenten ergibt folgendes Bild: Oberhalb eines gewissen Schwellwerts V_0 ist die gemittelte Dichte $\bar{\rho}$ annähernd konstant, für sehr kleines V hängt es jedoch vom Zufall ab, wie viele Moleküle sich in V befinden. Für $V \rightarrow 0$ wird $\bar{\rho}$ also zufällige Werte annehmen. Die für unsere Anschauung "richtige" Dichte im Punkt P ist der konstante Wert oberhalb von V_0 .

2.1 Definition. *Ein Materialpunkt (oder Teilchen) ist ein Volumen, das*

- *klein genug ist, um als infinitesimal bezüglich örtlicher Veränderungen von beliebigen physikalischen Materialeigenschaften zu gelten, und*
- *groß genug ist, um genügend Moleküle zu enthalten, so dass die physikalischen Eigenschaften statistisch stationär sind.*

Es stellt sich die Frage, ob diese Definition zu restriktiv ist, ob sich also die beiden obigen Bedingungen (fast) ausschließen. Betrachten wir zum Beispiel Luft. Ein Volumen von 10^{-12} cm^3 (das entspricht einem Würfel mit Kantenlänge 10^{-3} mm) enthält unter normalem Druck bei normaler Temperatur $3 \cdot 10^7$ Moleküle. Das Volumen ist damit klein genug, dass physikalische Größen nicht mehr variieren und auf dieser Menge als konstant angenommen werden können. Andererseits ist die Zahl der Moleküle groß genug, dass die Größen statistisch stabil sind.

Diese Definition funktioniert in vielen Fällen gut. In manchen Situationen, z.B. für dünne Gase (wo die Dichte zu niedrig ist) und in der Mikrofluidik (wo Mikroeffekte eine tragende Rolle spielen), funktioniert sie eher nicht. Dort sind die Bedingungen zu restriktiv.

Physikalische Größen können nun punktweise definiert werden. Für die Dichte setzen wir beispielsweise

$$\rho(P) := \lim_{V \rightarrow V_0 \ni P} \frac{M(V)}{V},$$

für andere Größen analog. Für die mathematische Theorie ist die Anwesenheit einer Unbekannten V_0 in einer Definition unschön. Wir nehmen $V_0 = 0$ an und nennen dies *Kontinuumshypothese*.

Die Masse $M(V)$ hat nun idealerweise folgende Eigenschaften:

1. $M(U \cup V) = M(U) + M(V)$ falls $U \cap V = \emptyset$,

2. $M(V) \geq 0$,
3. $M(V) \rightarrow 0$ für $|V| \rightarrow 0$,
4. $M(\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i) = \sum_{i=0}^{\infty} M(V_i)$ falls $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$.

Aus dem Satz von Radon-Nikodym folgt nun die Existenz einer *Dichtefunktion*. Es existiert also eine nicht-negative L^1 -Funktion ρ mit

$$M(V) =: \int_V \rho \, dx$$

für Borelmengen V . In der Realität kann man in 4. nur endliche disjunkte Vereinigungen benutzen, d.h. wir haben nur ein endlich additives Maß. Es existieren Varianten des Satzes von Radon-Nikodym die nur dies benutzen.

Der Zugang, den wir hier für die Dichte benutzt haben, lässt sich in ähnlicher Weise auch für andere physikalische Größen anwenden (indem z.B. der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Moleküle in einem Testvolumen betrachtet wird etc.).

1.3 Thermodynamik

Wir möchten mit thermodynamischen Größen wie Temperatur und innerer Energie arbeiten. Diese lassen sich gut unter Gleichgewichtsbedingungen für homogene Materialien definieren, was für Materialien in Ruhe kein Problem erzeugt. Für Materialien in Bewegung liegt i.A. jedoch gerade *kein* Gleichgewicht (z.B. der Temperatur) vor!

Man kann allerdings annehmen, dass sich jedes Teilchen in lokalem thermodynamischen Gleichgewicht mit seinen umgebenden Teilchen befindet, vorausgesetzt, die örtliche und zeitliche Variation der verschiedenen Größen ist nicht zu groß. Das bedeutet: die Zeitspanne, die Teilchen brauchen, um lokal ins Gleichgewicht zu kommen, ist *viel* kleiner als die Zeitskala der makroskopischen Veränderung der betrachteten Größe dadurch, dass Teilchen, aufgrund der Geschwindigkeit, durch das Volumen transportiert werden.

Diese Annahme ist in der Regel erfüllt, wenn die Voraussetzungen für die Kontinuumshypothese gegeben sind. Sie ist fragwürdig bspw. falls Schockwellen (z.B. in der Dichte) auftreten. Allerdings ist die Dicke von Schockwellen wiederum so klein, dass dort auch die Kontinuumshypothese hinterfragt werden muss.

Kompressibilität und Wärmeausdehnung

Für das Verhalten von Fluiden ist die Veränderung von Volumen oder Dichte unter Einfluss von Temperatur und Druck von zentraler Bedeutung. Sei im

Folgendes θ die Temperatur und p der (thermodynamische) Druck. Es gelte $\rho = \rho(\theta, p)$, wir nehmen also an, dass die Dichte genau von Temperatur und Druck abhängt. Für die zeitliche Veränderung der Dichte erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{d}{dt}\rho(\theta, p) = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

Für die relative Veränderung ergibt sich daraus

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}}_{=: \beta}\frac{dp}{dt} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}}_{=: -\alpha}\frac{d\theta}{dt}. \quad (3.1)$$

Wir nennen β den isothermalen Kompressibilitätskoeffizienten (für $\theta = \text{const.}$) und α den Wärmeausdehnungskoeffizienten (für $p = \text{const.}$). Die Vorzeichenkonvention in der Definition von α und β ergibt sich durch folgende Überlegung: Für steigende Temperatur steigt das Volumen und damit fällt die Dichte; deshalb wird $\alpha := -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}$ gewählt, um eine *positive* Konstante α zu erhalten. Umgekehrt sinkt das Volumen und steigt die Dichte für wachsenden Druck, weshalb wir $\beta := \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} > 0$ bekommen.

Für Wasser gilt nun bspw.

$$\beta \approx 10^{-7} \frac{1}{\text{kPa}}, \quad \alpha \approx 10^{-4} \frac{1}{\text{K}},$$

während für Luft

$$\beta \approx 10^{-2} \frac{1}{\text{kPa}}, \quad \alpha \approx 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$$

ist. Die Variation der Dichte ist für Gase also viel höher als für Flüssigkeiten. Durch die Konstante β erhalten wir demnach eine Bedingung, wann ein Fluid oder eine Strömung als inkompressibel angesehen werden kann. Die Unterscheidung zwischen Fluiden und deren Bewegungen ist wichtig. Es gibt Fluide die inkompressibel sind, d.h. β ist in allen Strömungen vernachlässigbar. Es gibt aber auch Fluide, die im Allgemeinen kompressibel sind, sich aber in konkreten Strömungen als inkompressibel betrachten lassen. Dies werden wir im Detail in Abschnitt 3.6 diskutieren.

Viskosität

Wir stellen uns ein großes Becken gefüllt mit einem Fluid vor, in dem sich verschiedene Schichten des Fluids mit Geschwindigkeit \boldsymbol{v} in x -Richtung bewegen. Die Geschwindigkeit ist eine vom Ort abhängige Funktion, die hier innerhalb jeder Schicht konstant sei. Zwischen den Schichten herrscht Interaktion: einerseits durch intermolekulare Kräfte, andererseits können Moleküle

der einen Schicht mit einer anderen Schicht kollidieren und dort bremsen oder beschleunigen, es findet eine Impulsübertragung statt. Dadurch entstehen Kräfte bzw. Spannungen τ (ein Begriff für Kraft pro Oberfläche). Das Beispiel, wenn ein Körper auf einen anderen prallt, macht die Annahme plausibel, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsdifferenz und erzeugter Kraft besteht. In Beispiel mit dem Becken gilt also

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

und den Proportionalitätsfaktor μ bezeichnen wir als Viskosität.

In allgemeinen Strömungen ist die Situation deutlich komplexer, aber die Viskosität als Proportionalitätsfaktor in der Beziehung zwischen Spannung und Geschwindigkeitsgradient bleibt.

Eine Erhöhung der Temperatur führt zu einer höheren Fluktuation der Moleküle und damit zu mehr Austausch und Kollision der Teilchen. Die Viskosität hängt also von der Temperatur ab. Mehr Bedeutung als die Größe μ hat die kinematische Viskosität $\nu := \frac{\mu}{\rho}$, wie wir später sehen werden.

Für einige typische Materialien kann man die folgenden Größenordnungen feststellen (bei Normbedingungen 15°C , 1MPa):

	Luft	Wasser	Quecksilber	Olivenöl
μ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right]$	10^{-5}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-1}
ρ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	1	10^3	10^4	10^3
ν $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-4}

Diffusion und Wärmeleitung

Die im vorigen Abschnitt dargestellte Impulsübertragung durch Viskosität ist nur ein mögliches Beispiel für einen Transportmechanismus auf mikroskopischer Ebene. Allgemeiner gilt: falls irgendeine Größe in einem Prozess nicht-gleichmäßig verteilt ist, so liegt eine Tendenz zum Ausgleich, zur Gleichgewichtsbildung, vor. Dieses physikalische Grundprinzip basiert wieder auf intermolekularen Kräften.¹

Betrachten wir als Beispiel ein inhomogenes Fluid, z.B. eine Mischung zweier mischbarer Fluide. Dann haben wir einen Konzentrationsgradienten, der zu Massetransport, zur Vermischung der beiden Fluide führt. Diesen

¹Auf mikro- und auf mesoskopischer Ebene, d.h. auf Modellebenen, die die intermolekularen Kräfte einbeziehen, kann dieses Prinzip unter geeigneten Voraussetzungen bewiesen werden. Da die in der Kontinuumsmechanik untersuchte makroskopische Ebene die Vorgänge auf Teilchenebene nicht kennt, ist das Gelten des Prinzips hier eine Annahme.

Vorgang nennen wir auch *Diffusion*. In diesem Skript werden vorwiegend homogene Fluide betrachtet, wo dieser Effekt weniger wichtig ist.

Eine wichtigere Rolle spielt die Wärmeleitung. Wärme entspricht kinetischer Energie der Moleküle und die Temperatur θ ist damit Maß für den Energielevel. Wenn die Temperatur in einem Material nicht gleichmäßig verteilt ist, so herrscht auch hier wieder die Tendenz zum Ausgleich, zum Temperaturgleichgewicht.

Um dies zu quantifizieren, betrachten wir wieder ein Material, von dem verschiedene zur x -Achse parallele Schichten verschiedene Temperaturen besitzen. Die unterschiedlichen kinetischen Energien führen zu Austausch durch Kollision und intermolekulare Kräfte, d.h. es findet ein Wärmetransport statt. Makroskopisch manifestiert sich das als Wärmeleitung. Der *Wärmefluss* q , definiert als Änderung der Wärmemenge pro Einheitsfläche pro Einheitszeit, ist die physikalisch sinnvolle Größe, um den Wärmetransport zu messen. Wir nehmen wieder an, dass die einfachstmögliche Beziehung zwischen Temperaturdifferenz und Wärmefluss vorliegt, nämlich eine proportionale Abhängigkeit. Es gilt also

$$q = -k \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

mit dem Wärmeleitkoeffizienten k als Proportionalitätskonstante. Das Minuszeichen kommt daher, dass Wärme von warm zu kalt fließt.

In der allgemeinen Situation ist der Wärmefluss \mathbf{q} eine vektorwertige Größe, und statt der partiellen Ableitung $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ müssen wir den Temperaturgradienten $\nabla \theta$ betrachten. Wir erhalten dann das *Fouriersche Gesetz*

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta.$$

1.4 Randbedingungen

Geeignete Randbedingungen sind in vielen Situationen sowohl aus physikalischer als auch aus mathematischer Sicht erforderlich, um sinnvolle (wohlgestellte) Probleme zu erhalten.

Um einige typische Randbedingungen herzuleiten, betrachten wir ein Fluid, das über eine feste Oberfläche strömt. An der Oberfläche befinde sich ein Materialpunkt P , d.h. ein sehr kleines Volumen mit sehr vielen Molekülen darin (Kontinuumshypothese), der sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Die Oberfläche habe die Normale \mathbf{n} und sie bewege sich selbst mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 . Wir können \mathbf{v} in normalen und tangentialen Anteil zerlegen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_t.$$

Da die Oberfläche fest ist, kann das Fluid sie nicht durchdringen. Wir erhalten die *Nicht-Durchdringungsbedingung*

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

an den normalen Anteil von \mathbf{v} .

Während die Behandlung der normalen Komponente relativ intuitiv möglich ist, ist sie für den tangentialen Anteil komplizierter. Sie ist immer noch Gegenstand wissenschaftlicher Diskussionen, ist noch nicht völlig geklärt und auch vom genau untersuchten Prozess abhängig. Eine typische Möglichkeit ist die folgende: So wie innerhalb des Fluids Interaktion und Ausgleich der Geschwindigkeiten zwischen Schichten (Viskosität) herrscht, geschieht dies analog zwischen Randschicht des Fluids und Randschicht des Festkörpers. Teilchen (des Fluids) haften somit an der Oberfläche, und wir erhalten die *no-slip boundary condition*

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)_t = \mathbf{0}.$$

Das heißt, die charakteristische Zeit, die Fluidteilchen benötigen, um in mechanisches Gleichgewicht mit festen Oberflächenteilchen zu kommen, ist viel kleiner als die charakteristische Zeit, dass Teilchen ihre makroskopische Geschwindigkeit ändern.

Betrachten wir bspw. einen Flug von Frankfurt nach New York. Die no-slip boundary condition impliziert nicht, dass dieselben Moleküle, die sich in Frankfurt an der Tragfläche befanden, dies auch in New York tun. Ein Teilchen (Materialpunkt) enthält viele Moleküle, die sich austauschen können (Fluktuation), trotzdem das Teilchen immer dieselbe Geschwindigkeit wie die Tragfläche hat. Die Geschwindigkeit des Teilchens gibt sozusagen den Mittelwert der Geschwindigkeiten der enthaltenen Moleküle an.

Es gibt allerdings Ausnahmen für diese Randbedingung, z.B. wenn die intermolekularen Kräfte innerhalb der Flüssigkeit viel größer sind als zwischen Fluid und Wand. Eine mögliche *slip boundary condition*, die wir in dieser Situation ableiten können, ist

$$\mathbf{t}_t = \mathbf{0}.$$

Dabei ist \mathbf{t} der Spannungsvektor, definiert durch $\mathbf{t} := \mathbf{T}\mathbf{n}$ mit dem Spannungstensor \mathbf{T} , der durch ein Gesetz wie z.B. $\mathbf{T} := \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^\top) + p\mathbf{I}$ bestimmt ist, wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit ist.

Kapitel 2

Kinematik

2.1 Konfiguration und Deformation

Wir wollen Körper und deren Bewegungen und Deformationen untersuchen. Dies geschieht in einer vierdimensionalen Raum-Zeit. Wir beschränken uns hier auf die Newtonsche Raum-Zeit \mathcal{W} , d.h. relativistische Effekte werden vernachlässigt. \mathcal{W} wird mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ identifiziert, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung

$$\Phi: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

die wir *Bezugssystem* nennen.

1.1 Definition. Ein Körper \mathcal{B} ist eine Menge von Materialpunkten P , die mit einer Topologie und einem nichtnegativen Borelmaß versehen ist.

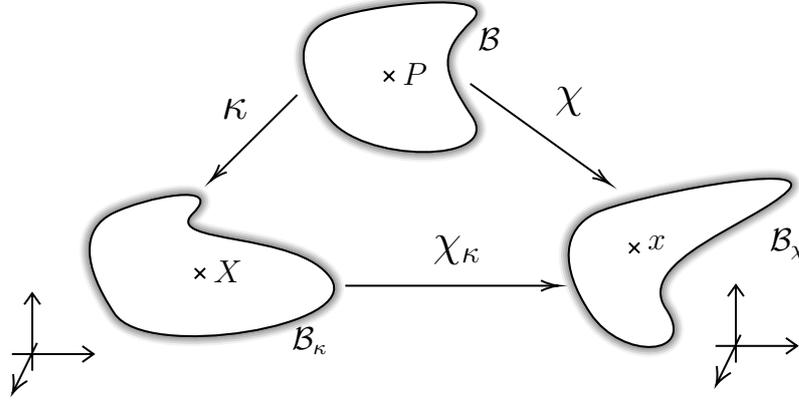
1.2 Definition. Eine Konfiguration eines Körpers \mathcal{B} ist eine bijektive Abbildung von \mathcal{B} in eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 .

Um der Konfiguration des Körpers eine mathematische Struktur zu geben, versehen wir \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt, der Standardbasis und einem Koordinatenursprung. Man könnte auch beliebige andere Skalarprodukte und -basen nehmen. Man kann z.B. das Koordinatensystem bezüglich eines Labors, eines Fixsterns oder eines fahrenden Zuges betrachten.

Es ist nun zweckmäßig, eine bestimmte Konfiguration als Referenzkonfiguration zu wählen. Sei

$$\kappa: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad P \mapsto \mathbf{X} := \kappa(P) \tag{1.3}$$

eine Referenzkonfiguration. Die Koordinaten von \mathbf{X} bzgl. der Standardbasis, d.h. $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$, nennt man Referenzkoordinaten. Der Körper \mathcal{B} in einer Konfiguration κ wird mit \mathcal{B}_κ bezeichnet.



1.4 Definition. Sei κ eine Referenzkonfiguration und χ eine beliebige weitere Konfiguration. Die Abbildung

$$\chi_\kappa := \chi \circ \kappa^{-1}: \mathcal{B}_\kappa \rightarrow \mathcal{B}_\chi, \quad \mathbf{X} \mapsto \chi_\kappa(\mathbf{X}) \quad (1.5)$$

heißt Deformation des Körpers \mathcal{B} von κ nach χ . Wir notieren

$$\mathbf{x} := \chi_\kappa(\mathbf{X}) = \chi(\kappa^{-1}(\mathbf{X})). \quad (1.6)$$

Per Konstruktion ist die Abbildung χ_κ bijektiv. Wir beschränken uns im Weiteren auf C^1 -Diffeomorphismen χ_κ .

1.7 Definition. Der Deformationsgradient von χ relativ zu κ ist durch

$$\mathbf{F}_\kappa := \nabla_{\mathbf{X}} \chi_\kappa \quad (1.8)$$

definiert.

Wenn klar ist, welche Referenzkonfiguration gemeint ist, wird \mathbf{F}_κ auch einfach als \mathbf{F} bezeichnet. Aus der Bijektivität von χ_κ folgt mit dem Satz über die Umkehrabbildung, dass $\det \mathbf{F}_\kappa \neq 0$ ist. Es gilt

$$\nabla_{\mathbf{X}} \chi_\kappa = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial X^j} \right)_{\substack{i=1,\dots,3 \\ j=1,\dots,3}}.$$

Die Taylorformel liefert nun

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \chi_\kappa(\mathbf{X}) - \chi_\kappa(\mathbf{X}_0) = \mathbf{F}_\kappa(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + o(|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|). \quad (1.9)$$

Wir definieren die Vektoren

$$d\mathbf{X} := \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \quad \text{und} \quad d\mathbf{x} := \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (1.10)$$

Aus (1.9) folgt, dass $d\mathbf{x}$ eine Approximation 1. Ordnung an $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ist.

1.11 Lemma. Seien $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ zwei linear unabhängige Vektoren und seien $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2$ durch (1.10) definiert. Dann gilt für $d\mathbf{A} := d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$ und $d\mathbf{a} := d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2$ die Beziehung

$$d\mathbf{a} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-\top} d\mathbf{A}. \quad (1.12)$$

$d\mathbf{A}$ ist derjenige Vektor, der senkrecht zum von $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ aufgespannten Parallelogramm steht und als Länge gerade den Flächeninhalt dieses Parallelogramms hat.

BEWEIS: Es gilt $d\mathbf{a} := d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2)$. Wir überprüfen (1.12) komponentenweise:

$$\begin{aligned} da^i &= \varepsilon_{ijk} F_m^j dX_1^m F_p^k dX_2^p \\ &= \delta_i^q \varepsilon_{qjk} F_m^j F_p^k dX_1^m dX_2^p \\ &= F_r^q (\mathbf{F}^{-1})_i^r F_m^j F_p^k \varepsilon_{qjk} dX_1^m dX_2^p \\ &= \varepsilon_{rmp} \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1})_i^r dX_1^m dX_2^p \\ &= \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-\top} d\mathbf{A})^i. \quad \square \end{aligned}$$

1.13 Lemma. Seien $d\mathbf{X}_i, i = 1, 2, 3$, linear unabhängige Vektoren, $d\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$ die durch (1.10) definierten deformierten Vektoren und $d\mathbf{V}$ bzw. $d\mathbf{v}$ die jeweils aufgespannten Parallelepipede. Dann gilt

$$\text{vol}(d\mathbf{v}) = \det \mathbf{F} \text{vol}(d\mathbf{V}).$$

BEWEIS: Es gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(d\mathbf{v}) &= d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3) \\ &= \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_3) \\ &= \varepsilon_{ijk} F_m^i dX_1^m F_p^j dX_2^p F_q^k dX_3^q \\ &= \varepsilon_{mpq} \det \mathbf{F} dX_1^m dX_2^p dX_3^q \\ &= \det \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \cdot (d\mathbf{X}_2 \times d\mathbf{X}_3) \\ &= \det \mathbf{F} \text{vol}(d\mathbf{V}). \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 1.13 zeigt, dass $\det \mathbf{F}$ ein Maß für die lokale Deformation eines Körpers ist.

2.2 Bewegung

2.1 Definition. Eine Bewegung eines Körpers ist eine stetige Parameterfamilie von Konfigurationen, d.h. eine Abbildung $\chi: I \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $\chi_t := \chi(t, \cdot)$ für alle $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ eine Konfiguration ist.

Wir nehmen $I = [0, T]$ an, wählen $\boldsymbol{\chi}_0 := \boldsymbol{\chi}(0, \cdot)$ als Referenzkonfiguration und identifizieren Materialpunkte P mit ihrer Position zum Zeitpunkt 0. Ferner notieren wir

$$\mathbf{X} := \boldsymbol{\chi}(0, P), \quad \mathbf{X} =: X^i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

und nennen dies die *Referenz-* oder *Lagrangekoordinaten*.

Mithilfe von Definition 1.4 kann man eine Bewegung auch als eine stetige Parameterfamilie von Deformationen auffassen:

$$\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\chi}_0}(t, \cdot) = \boldsymbol{\chi}_t \circ \boldsymbol{\chi}_0^{-1}: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} \quad (2.3)$$

Da die Referenzkonfiguration schon gewählt ist, werden wir den Index $\boldsymbol{\chi}_0$ in Zukunft weglassen. Damit können wir die *Eulerkoordinaten* definieren:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) := \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{x} =: x^i \mathbf{e}_i. \quad (2.4)$$

Für die Fahrt mit einem Auto beschreiben die Lagrangekoordinaten die Sichtweise der Fahrers im Auto und die Eulerkoordinaten die Sichtweise eines feststehenden Beobachters, der die vorbeifahrendes Autos verfolgt.

Mit dieser Notation gilt für den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial x^i(t, \mathbf{X})}{\partial X^j} \right)_j^i. \quad (2.5)$$

Jede physikalische Größe, die mit der Bewegung in Zusammenhang steht, d.h. eine Funktion $\mathbf{G}: I \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, kann beschrieben werden bzgl. den *Eulerkoordinaten* (t, \mathbf{x}) oder den *Lagrangekoordinaten* (t, \mathbf{X}) , welche durch die Transformation $\boldsymbol{\chi}$ ineinander überführt werden. So hat \mathbf{G} die Beschreibungen

$$\mathbf{G}(t, P) = \widehat{\mathbf{G}}(t, \mathbf{X}) = \widetilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x})$$

wobei $\widehat{\mathbf{G}}: I \times \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\widetilde{\mathbf{G}}: I \times \mathcal{B}_t \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist. Zwischen $\widehat{\mathbf{G}}$ und $\widetilde{\mathbf{G}}$ gelten somit die Beziehungen

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{G}}(t, \mathbf{X}) &= \widetilde{\mathbf{G}}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})), \\ \widetilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}) &= \widehat{\mathbf{G}}(t, \boldsymbol{\chi}^{-1}(t, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Wir nennen $\widehat{\mathbf{G}}$ die *Lagrangebeschreibung* und $\widetilde{\mathbf{G}}$ die Eulerbeschreibung der Größe \mathbf{G} . Da es ja nur verschiedene Beschreibungen derselben Größe sind, ist es in der Kontinuumsmechanik üblich, nicht zwischen $\widehat{\mathbf{G}}$ und $\widetilde{\mathbf{G}}$ zu unterscheiden. Dies kann jedoch zu Unklarheiten führen, wenn die Größe bzgl.

Zeit oder Ort abgeleitet wird, denn das Ableiten hängt von der Wahl der Koordinaten ab. Dies wird dadurch vermieden, dass unterschiedliche Symbole für die verschiedenen Ableitungen verwendet werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{Grad} \mathbf{G} &:= \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{G} = \left(\frac{\partial \widehat{\mathbf{G}}^i}{\partial X^j}(t, \mathbf{X}) \right)_j^i, \\ \mathbf{grad} \mathbf{G} &:= \nabla \mathbf{G} := \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{G} = \left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{G}}^i}{\partial x^j}(t, \mathbf{x}) \right)_j^i, \\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} &:= \dot{\mathbf{G}} := \frac{\partial \widehat{\mathbf{G}}}{\partial t}(t, \mathbf{X}) = \frac{d\widehat{\mathbf{G}}}{dt}(t, \mathbf{X}), \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} &:= \partial_t \mathbf{G} := \frac{\partial \widetilde{\mathbf{G}}}{\partial t}(t, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

Wir bezeichnen $\dot{\mathbf{G}}$ als *materielle Zeitableitung*.

2.6 Definition. Die Geschwindigkeit einer Bewegung ist definiert als

$$\mathbf{v} := \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}(t, \mathbf{X}),$$

Es gilt dann $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{v}}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) = \widehat{\mathbf{v}}(t, \mathbf{X})$.

2.7 Definition. Die Beschleunigung einer Bewegung ist definiert als

$$\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\chi}}{dt^2},$$

d.h. es gilt $\mathbf{a} = \widetilde{\mathbf{a}}(t, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{a}}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) = \widehat{\mathbf{a}}(t, \mathbf{X})$.

2.8 Definition. Der Geschwindigkeitsgradient einer Bewegung ist definiert durch

$$\mathbf{L} := \nabla \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v}.$$

Wir können die (tensorwertige Größe) \mathbf{L} eindeutig in ihren symmetrischen und ihren antisymmetrischen Teil zerlegen, d.h. wir schreiben

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

mit

$$\mathbf{D} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top), \quad \mathbf{W} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^\top).$$

Während die kanonische Darstellung der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und des Geschwindigkeitsgradienten die Eulerbeschreibung ist, ist die kanonische Darstellung des Deformationsgradienten die Lagrangedarstellung, d.h. $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{a} = \widetilde{\mathbf{a}}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}(t, \mathbf{x})$ und $\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X})$.

Wir wollen nun einige hilfreiche Relationen herleiten.

2.9 Lemma. Für jede (skalare) Größe G gilt folgende Beziehung zwischen materieller und partieller Zeitableitung:

$$\dot{G} = \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + v^j \frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla G).$$

BEWEIS: Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \frac{d\widehat{G}}{dt}(t, \mathbf{X}) \\ &= \frac{d\widetilde{G}}{dt}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) \\ &= \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) + \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x^j}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial t}(t, \mathbf{X})}_{=\widetilde{v}^j(t, \mathbf{x})} \\ &= \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \widetilde{v}^j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x^j}(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Wir können Lemma 2.9 auch komponentenweise auf Vektoren/ Tensoren anwenden. Für ein Vektorfeld $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ erhalten wir

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{v},$$

wobei $([\nabla \mathbf{u}] \mathbf{v})^i := \partial_j u^i v^j$.

2.10 Lemma. Es gilt die folgende Beziehung zwischen dem Euler- und dem Lagrangegradienten einer Größe G :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial X^i} &= F_i^j \frac{\partial G}{\partial x^j}, \\ \mathbf{Grad} G &= \mathbf{F}^\top \mathbf{grad} G = \mathbf{F}^\top \nabla G. \end{aligned}$$

BEWEIS: Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial X^i} &= \frac{\partial \widehat{G}}{\partial X^i}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial X^i}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) \\ &= \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial x^j}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})) \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial X^i}}_{=F_i^j} \\ &= F_i^j \frac{\partial G}{\partial x^j} = (\mathbf{F}^\top \nabla G)_i. \end{aligned}$$

□

Für ein Vektorfeld \mathbf{u} ergibt sich also

$$\frac{\partial u^i}{\partial X^j} = F_j^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k},$$

d.h.

$$\mathbf{Grad} \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \mathbf{F}.$$

Indem wir $\mathbf{Grad} \frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbf{Grad} \boldsymbol{\chi}$ benutzen, erhalten wir insbesondere für die Geschwindigkeit \mathbf{v} , dass

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \quad (2.11)$$

bzw.

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.12)$$

gilt.

In der linearen Algebra wird folgende Implikation gezeigt: Da \mathbf{F} invertierbar ist, existieren eindeutig bestimmte Matrizen \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{R} , wobei \mathbf{U} , \mathbf{V} symmetrisch und positiv definit sind und \mathbf{R} orthogonal ist (d.h. $\mathbf{R} \mathbf{R}^\top = \mathbf{I}$), sodass

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}$$

gilt. Mit (2.12) folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{R} \dot{\mathbf{U}}) (\mathbf{R} \mathbf{U})^{-1} \\ &= (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{U} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}}) \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^\top. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{V}} \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1}$ anhand der Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$. Wir fixieren t und wählen die aktuelle Konfiguration als Referenzkonfiguration. Wir benutzen den Index 0, um dies anzuzeigen. Es gilt nun $\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}$ und damit $\mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 = \mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$. Daraus folgt

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{V}}_0 + \dot{\mathbf{R}}_0.$$

Man kann nachrechnen, dass $\dot{\mathbf{R}}_0$ antisymmetrisch ist und $\dot{\mathbf{U}}_0$, $\dot{\mathbf{V}}_0$ symmetrisch sind. Vergleichen wir dies mit der eindeutigen Zerlegung $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil aus Definition 2.8, so folgt

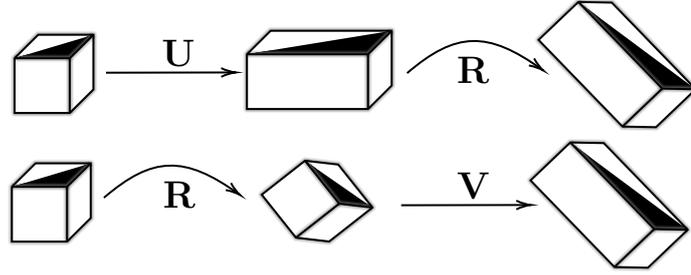
$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{V}}_0, \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}_0. \quad (2.13)$$

Wir können diese Beobachtung folgendermaßen interpretieren: Dass \mathbf{U} symmetrisch und positiv definit ist, ist äquivalent dazu, dass alle Eigenwerte

positiv sind. Es existiert also eine Orthonormalbasis \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, 3$, von Eigenvektoren mit $\mathbf{U} \mathbf{b}_i = \lambda \mathbf{b}_i$. \mathbf{R} ist orthogonal und damit eine Rotationsmatrix (falls $\det \mathbf{R} > 0$ ist). Für die Vektoren $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{X}$ aus Abschnitt 2.1 folgt

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = \underbrace{\mathbf{R}}_{\text{Rotation}} \underbrace{\mathbf{U} d\mathbf{X}}_{\text{Verzerrung}} = \underbrace{\mathbf{V}}_{\text{Verzerrung}} \underbrace{\mathbf{R} d\mathbf{X}}_{\text{Rotation}}.$$

\mathbf{U} und \mathbf{V} heißen deshalb auch *Verzerrungstensoren*.



Dass wir die aktuelle Konfiguration als Referenzkonfiguration gewählt haben, impliziert $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_0$. Der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} misst also die Deformationsgeschwindigkeit. Wir erinnern uns an die Darstellung (2.13) und können deshalb den symmetrischen Anteil \mathbf{D} des Geschwindigkeitsgradienten als *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* und den asymmetrischen Anteil \mathbf{W} als *Rotationsgeschwindigkeitstensor* auffassen.

2.14 Lemma. Sei J die Determinante des Deformationsgradienten, d.h. $J := \det \mathbf{F}$. Dann gilt

$$\dot{J} = J \operatorname{tr} \mathbf{L} = J \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

BEWEIS: Wir erinnern an die Notation $\mathbf{A} : \mathbf{B} := \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}) = A_j^i B_j^i$. Mit (2.11) gilt dann

$$\dot{J} = \frac{d}{dt} \det \mathbf{F} = \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial F_j^i} \dot{F}_j^i = \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial F_j^i} L_k^i F_j^k = \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} : (\mathbf{L} \mathbf{F}).$$

Andererseits gilt für alle \mathbf{C} , dass

$$\left. \frac{d}{ds} \det(\mathbf{F} + s \mathbf{C}) \right|_{s=0} = \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} : \mathbf{C}.$$

Weiter haben wir

$$\det(\mathbf{F} + s \mathbf{C}) = \det(s \mathbf{F} (s^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{C})) = s^3 \det \mathbf{F} \det(s^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}).$$

Aus der linearen Algebra kennen wir die Darstellung des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) = \lambda^3 + \lambda^2 I_1(\mathbf{A}) + \lambda I_2(\mathbf{A}) + I_3(\mathbf{A})$, wobei $I_i(\mathbf{A})$ die Hauptinvarianten von \mathbf{A} sind, d.h. $I_1(\mathbf{A}) = \operatorname{tr} \mathbf{A}$, $I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} ((\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} (\mathbf{A}^2))$, $I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$. Es folgt

$$\det(\mathbf{F} + s \mathbf{C}) = \det \mathbf{F} (1 + s I_1(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}) + s^2 I_2(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}) + s^3 I_3(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{C})).$$

Wir berechnen

$$I_1(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}) = \operatorname{tr} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{C}) = (\mathbf{F}^{-1})_j^i C_i^j = \mathbf{F}^{-\top} : \mathbf{C}$$

und erhalten

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-\top}.$$

Insgesamt folgt

$$\dot{j} = J \mathbf{F}^{-\top} : (\mathbf{L} \mathbf{F}) = J \operatorname{tr} (\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{L} \mathbf{F})) = J \operatorname{tr} ((\mathbf{L} \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1}) = J \operatorname{tr} \mathbf{L}. \quad \square$$

2.15 Satz (Transporttheorem). Sei $V_0 \subset \mathcal{B}_0$ und sei $V_t = \chi_t(V_0)$ eine Bewegung eines Teils des Körpers \mathcal{B} . Weiter sei G eine Größe der Bewegung von \mathcal{B} . Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \tilde{G}(t, \mathbf{x}) dx = \int_{V_t} \frac{d}{dt} \tilde{G}(t, \mathbf{x}) + \tilde{G}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) dx. \quad (2.16)$$

BEWEIS: Aus dem Transformationssatz folgt

$$\int_{V_t} \tilde{G}(t, \mathbf{x}) dx = \int_{V_0} \underbrace{\tilde{G}(t, \chi(t, \mathbf{X}))}_{=\widehat{G}(t, \mathbf{X})} J(t, \mathbf{X}) dX.$$

Daraus folgt mit dem Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale und Rücktransformation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} G dx &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \widehat{G}(t, \mathbf{X}) J(t, \mathbf{X}) dX \\ &= \int_{V_0} \frac{d}{dt} \widehat{G}(t, \mathbf{X}) J(t, \mathbf{X}) + \widehat{G}(t, \mathbf{X}) \underbrace{\frac{d}{dt} J(t, \mathbf{X})}_{=J(t, \mathbf{X}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{X})} dX \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{d}{dt} \tilde{G}(t, \chi(t, \mathbf{X})) + \tilde{G}(t, \chi(t, \mathbf{X})) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}(t, \chi(t, \mathbf{X})) \right) J(t, \mathbf{X}) dX \\ &= \int_{V_t} \frac{d}{dt} \tilde{G}(t, \mathbf{x}) + \tilde{G}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung. Im Falle zeitabhängiger Gebiete ist es nicht möglich, Differentiation und Integration im Stile parameterabhängiger Integrale zu vertauschen. Wir betrachten dazu folgendes Beispiel: Sei $B_t(0) \subset \mathbb{R}^d$ ein Ball mit Radius t . Dann gilt einerseits

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t(0)} 1 \, dx = \frac{d}{dt} \text{vol}(B_t(0)) = c(d) t^{d-1}$$

und andererseits

$$\int_{B_t(0)} \frac{d}{dt} 1 \, dx = \int_{B_t(0)} 0 \, dx = 0.$$

Offensichtlich gilt also

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t(0)} 1 \, dx \neq \int_{B_t(0)} \frac{d}{dt} 1 \, dx.$$

Aus Lemma 2.9 folgt mit der Produktregel

$$\dot{G} + G \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_t G + \operatorname{div}(G \mathbf{v}).$$

Wir setzen dies in (2.16) ein und erhalten mit dem Satz von Gauß

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} G \, dx = \int_{V_t} \partial_t G + \operatorname{div}(G \mathbf{v}) \, dx = \int_{V_t} \partial_t G \, dx + \int_{\partial V_t} G \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, do.$$

Wir haben also die zeitliche Änderung der Größe G in einem zeitabhängigen Volumen V_t als zeitliche Änderung bei festem Gebiet V_t (linkes Integral) plus dem Fluss durch den Rand ∂V_t (rechtes Integral) dargestellt.

2.17 Definition. Eine Starrkörperbewegung eines Körpers ist eine Bewegung, bei der der Abstand zweier beliebiger Punkte invariant (konstant) ist.

Das folgende Lemma aus der linearen Algebra charakterisiert Starrkörperbewegungen als affine Transformationen:

2.18 Lemma. Eine Bewegung ist genau dann eine Starrkörperbewegung, wenn

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}$$

gilt, wobei $\mathbf{c}(t)$ ein Vektor und $\mathbf{Q}(t)$ ein orthogonaler Tensor ist.

BEWEIS: "←": Klar.

"⇒": Sei $\boldsymbol{\chi}$ eine Starrkörperbewegung und seien

$$\mathbf{x}_i := \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}_i), \quad \text{für } i = 0, 1, 2.$$

Dann gilt

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|, \quad \text{für } i, j = 0, 1, 2.$$

Außerdem gilt

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|^2 - 2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0|^2$$

und analog

$$|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|^2 = |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0|^2 - 2(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_0) + |\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_0|^2.$$

Insgesamt erhalten wir aus diesen Gleichungen, dass

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_0). \quad (2.19)$$

Sei nun (\mathbf{e}_α) die Standardbasis des \mathbb{R}^3 , $\lambda \neq 0$ klein und die Materialpunkte P_α so gewählt, dass

$$\mathbf{X}_0 + \lambda \mathbf{e}_\alpha = \chi(0, P_\alpha) =: \mathbf{X}_\alpha.$$

Mit \mathbf{x}_α bezeichnen wir die Bilder von \mathbf{X}_α unter χ_t und stellen sie in der Form

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{b}_\alpha$$

dar, wobei \mathbf{b}_α ein passend gewählter Vektor des \mathbb{R}^3 ist. Ersetzen wir nun \mathbf{X}_2 und \mathbf{X}_1 in (2.19) nacheinander durch \mathbf{X}_α und \mathbf{X}_β erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_\alpha &= (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

für $\alpha, \beta = 0, 1, 2$. Somit sind die (\mathbf{b}_α) eine Orthonormal-Basis des \mathbb{R}^3 . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 &= ((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}^\alpha) \mathbf{b}_\alpha \\ &= ((\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{e}^\alpha) \mathbf{b}_\alpha \\ &= (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\beta) (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \\ &:= \mathbf{Q} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0). \end{aligned}$$

Dass es sich bei \mathbf{Q} um einen orthogonalen Tensor handelt ist klar aus der Definition über das Tensorprodukt. Nun definieren wir noch für ein festes \mathbf{X}_0

$$\mathbf{c} := \mathbf{x}_0 - \mathbf{Q} (\mathbf{X}_0)$$

und haben damit für ein festes aber beliebiges t einen Vektor \mathbf{c} und einen orthogonalen Tensor \mathbf{Q} gefunden, so dass für beliebige \mathbf{X} gilt

$$\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X}) = \mathbf{c} + \mathbf{Q}(\mathbf{X}).$$

Da t beliebig war beweist dies die Behauptung. □

Kapitel 3

Grundgleichungen der Thermodynamik

3.1 Massenerhaltung

In Abschnitt 1.2 haben wir gesehen, dass die Eigenschaften der Masse die Existenz einer Dichte ρ implizieren. Sei χ eine Bewegung eines Körpers und sei

$$\rho: I \times \mathcal{B}_t \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \mathbf{x}) \mapsto \rho(t, \mathbf{x})$$

die zugehörige Dichte. Dann ist die Masse eines beliebigen Teils des Körpers $V \subseteq \mathcal{B}$ zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$M(V) = \int_{V_t} \rho \, dx,$$

wobei $V_t := \chi_t(V)$.

Wir betrachten im Folgenden nur Prozesse ohne chemische und kernphysikalische Reaktionen, das bedeutet, es wird weder Masse erzeugt noch vernichtet. Wir wissen damit:

1.1 Prinzip (Prinzip der Massenerhaltung). *Die Masse jedes beliebigen Teils V des Körpers \mathcal{B} ist in jeder Bewegung zeitlich konstant, d.h.*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \, dx = 0. \quad (1.2)$$

Das Transporttheorem 2.15 liefert dann für alle Zeiten t , dass

$$\int_{V_t} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0 \quad (1.3)$$

bzw.

$$\int_{V_t} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx = 0. \quad (1.4)$$

In der Modellierung nehmen wir an, dass alle auftretenden Größen glatt sind. Diese Annahme wird erst bei der mathematischen Theorie der entsprechenden Gleichungen wieder aufgegeben werden. Da V_t beliebig ist und der Integrand als glatt angenommen wurde, erhalten wir aus (1.3), (1.4) die *lokalen Gleichungen der Massenerhaltung*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.5)$$

bzw.

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.6)$$

in der *Eulerbeschreibung*.

Das Prinzip der Massenerhaltung 1.1 liefert auch, dass die Masse eines Teils V des Körpers zu jedem Zeitpunkt gleich ist, d.h.

$$M(V) = \int_{V_0} \rho dX = \int_{V_t} \rho dx.$$

Mit der Transformationsformel folgt

$$\int_{V_0} \hat{\rho}(0, \mathbf{X}) dX = \int_{V_0} \underbrace{\tilde{\rho}(t, \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}))}_{=\hat{\rho}(t, \mathbf{X})} J(t, \mathbf{X}) dX.$$

Da V_0 beliebig war, folgt für alle $t \in I$, $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$

$$\hat{\rho}(0, \mathbf{X}) = \hat{\rho}(t, \mathbf{X}) J(t, \mathbf{X}), \quad (1.7)$$

die *Massenerhaltungsgleichung* in der *Lagrangebeschreibung*.

3.2 Energieerhaltung

Wir vernachlässigen chemische Prozesse und elektromagnetische Effekte und postulieren das Energieerhaltungsgesetz: ¹

2.1 Prinzip (1. Hauptsatz der Thermodynamik). *Für jeden beliebigen Teil V eines Körpers \mathcal{B} ist in jeder Bewegung die Änderung der totalen Energie E gleich der zugeführten Wärme H plus der geleisteten mechanischen Arbeit P , d.h.*

$$\dot{E}(V_t) = P(V_t) + H(V_t). \quad (2.2)$$

¹Auch dieses Gesetz kann auf niedrigeren Modellebenen, d.h. auf mikro- oder mesoskopischer Ebene unter Beschreibung der molekularkinetischen Vorgänge, bewiesen werden.

Um aus dem Prinzip 2.1 brauchbare Schlüsse ziehen zu können, bringen wir die neu eingeführten Größen E , P , H nun mit bekannten Größen in Zusammenhang. Die totale Energie E ist selbst Summe aus kinetischer und innerer Energie, wobei gilt

$$\begin{aligned} \text{kinetische Energie:} \quad & K(V_t) := \int_{V_t} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 dx, \\ \text{innere Energie:} \quad & U(V_t) := \int_{V_t} \rho e dx. \end{aligned}$$

Dabei ist e die spezifische innere Energie, d.h. innere Energie pro Masse.

Nun betrachten wir Leistung und Arbeit. Arbeit ist definiert als Kraft mal Weg. Geleistete Arbeit, also Leistung, ist Arbeit pro Zeit und damit gleich Kraft pro Geschwindigkeit. Auf einen Körper wirken für alle Testvolumina V_t Volumenkräfte (wie Gravitation, Zentrifugalkräfte), sowie Oberflächenkräfte (wie Druck, Zug oder Spannung). Wir bezeichnen mit \mathbf{b} die *spezifische äußere Volumenkraft* und mit \mathbf{t} die *Kontaktkraft* auf den Rand von ∂V_t und schreiben die Gesamtkraft \mathbf{F} als

$$\mathbf{F}(V_t) = \int_{V_t} \rho \mathbf{b} dx + \int_{\partial V_t} \mathbf{t} do.$$

2.3 Satz (Spannungsprinzip von Cauchy). *In jedem geschlossenen System gibt es einen Spannungsvektor \mathbf{t} , sodass er die Wirkung der aktuellen Kräfte, die vom Material auf das Testvolumen V_t einwirken, ausgleicht. Der Spannungsvektor hängt nur von der Position und der äußeren Normalen der Oberfläche des Testvolumens ab, d.h.*

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}).$$

Für die mechanische Leistung folgt damit

$$P(V_t) = \int_{V_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} do.$$

Für die Wärme gehen wir analog vor. Wir unterscheiden zwischen spezifischen Volumenwärmequellen r (z.B. durch Radiation/ Wärmestrahlung) und Wärmefluss durch die Oberfläche h . Für die Wärmezufuhr ergibt dies die Zerlegung

$$H(V_t) = \int_{V_t} \rho r dx + \int_{\partial V_t} h do.$$

Analog zum Cauchyschen Spannungsprinzip postulieren wir das Wärmeflussprinzip von Fourier:

2.4 Satz (Wärmeflussprinzip von Fourier). *Der Wärmefluss h hängt nur von der Position und der äußeren Normalen ab, d.h.*

$$h = h(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}).$$

Insgesamt liefert der 1. Hauptsatz also:

2.5 Folgerung. *Es gilt*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_t} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \, dx \right) = \int_{V_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r \, dx + \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h \, do. \quad (2.6)$$

3.3 Invarianzen

Prinzip der Objektivität (PMFI)

Das Prinzip der Objektivität oder PMFI (Principle of material frame indifference) gibt Auskunft über die Invarianz der Materialeigenschaften und der Materialgesetze.

Um fundamentale Größen wie Zeitintervalle oder Abstände messen zu können, benötigen wir ein Bezugssystem (z.B. Labor, Fixstern). Nur wenn ein solches Bezugssystem zu allen Zeiten gegeben ist, kann man die relative Bewegung von Teilchen bestimmen und damit Geschwindigkeiten, Beschleunigungen usw. berechnen. In Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, dass dieses Bezugssystem mathematisch beschrieben wird durch eine Abbildung

$$\Phi: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

Im Prinzip ist nicht das Bezugssystem an sich wichtig, sondern vielmehr die Änderung desselben, welche die Eigenschaft haben sollte, dass Abstände, Zeitintervalle und die zeitliche Reihenfolge erhalten bleiben. Seien Φ und Φ^* zwei Bezugssysteme. Dann nennen wir

$$* := \Phi^* \circ \Phi^{-1}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad (t, \mathbf{x}) \mapsto (t^*, \mathbf{x}^*) \quad (3.2)$$

eine **Bezugssystemänderung**. Wenn eine Bezugssystemänderung die obigen Bedingungen erfüllt, dann kann man genau wie für die Starrkörperbewegungen (vgl. Lemma 2.18) zeigen, dass dann gelten muss:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t), \\ t^* &= t - a, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei $\mathbf{Q}(t)$ ein eigentlicher orthogonaler Tensor ist, d.h. $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^\top(t) = \mathbf{I}$, $\det \mathbf{Q} = 1$, $\mathbf{c}(t)$ ein Vektor und a ein Skalar.

3.4 Definition. Sei $*$ eine Bezugssystemänderung der Form (3.3). Wir nennen eine zeitabhängige Größe Bezugssystem-indifferent bzw. objektiv, wenn gilt:

$$\begin{aligned} b^*(t^*) &= b(t) && \text{für Skalare,} \\ \mathbf{u}^*(t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}(t) && \text{für Vektoren,} \\ \mathbf{S}^*(t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{Q}^\top(t) && \text{für Tensoren.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für einen Vektor \mathbf{u} im Bezugssystem Φ existieren Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Seien $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$ die zugehörigen Punkte bzgl. des Bezugssystems Φ^* und sei $\mathbf{u}^* := \mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*$. Aus (3.3) folgt dann $\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$. Dies bedeutet, dass \mathbf{u} und \mathbf{u}^* denselben Vektor, beobachtet in verschiedenen Bezugssystemen, darstellen. Analog argumentiert man bei Tensoren, die ja mit linearen Abbildungen identifiziert werden. In der Tat soll für alle Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} gelten: $\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{v}^*$, aber $\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{Q}^\top\mathbf{v}^* = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top\mathbf{v}^*$, d.h. $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top$. Eigentlich ist (3.5) nichts anderes als ein Basiswechsel.

Ein Spezialfall hiervon sind die **Galilei-Transformationen**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \\ t^* &= t - a, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei \mathbf{Q} ein eigentlicher orthogonaler Tensor ist, \mathbf{c}, \mathbf{d} Vektoren sind und a ein Skalar ist. Wir haben also in (3.3) $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}$, $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{d}$ gesetzt, d.h. es kommen keine beschleunigten Transformationen vor. Wenn man nur Galilei-Transformationen betrachteten würde, wäre eine Beschreibung der Drehung eines Karussells aus der Sicht einer mitfahrenden Person nicht möglich.

Sei nun eine Bewegung $\mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X})$ gegeben. Wir wissen, dass die Geschwindigkeit und die Beschleunigung vom Bezugssystem (Beobachter) abhängen und somit nicht objektiv sein können. Wir berechnen die Transformation einiger kinematischer Größen für den Fall $a = 0$. Es gilt

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) := \boldsymbol{\chi}^*(t, \mathbf{X}), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\boldsymbol{\chi}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt}\boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{Q}\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{v}} + \ddot{\mathbf{c}} + 2\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}, \quad (3.9)$$

$$\nabla^*\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}\nabla\mathbf{v}\mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top. \quad (3.12)$$

Da \mathbf{Q} orthogonal ist, folgt, dass $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top$ antisymmetrisch ist. In der Tat, wenn man die Zeitableitung von $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}$ berechnet, erhält man

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top = -\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^\top = -(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top)^\top, \quad (3.13)$$

was beweist, dass $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top$ antisymmetrisch ist. Daraus folgt auch, dass $\operatorname{div}\mathbf{v}$ objektiv ist, denn

$$\operatorname{div}^*\mathbf{v}^* = \operatorname{tr}\nabla^*\mathbf{v}^* = \operatorname{tr}(\mathbf{Q}\nabla\mathbf{v}\mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\top) = \operatorname{tr}\nabla\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}. \quad (3.14)$$

Man beachte, dass die Beschleunigung und der Geschwindigkeitsgradient invariant unter Galilei-Transformationen sind.

Übung: Man leite eine Formel für den Gradienten eines objektiven Vektors her und für die materielle Zeitableitung objektiver Größen.

3.15 Prinzip (Prinzip der Objektivität). *Alle Materialeigenschaften sind unabhängig vom Bezugssystem, d.h. sie sind objektiv. Insbesondere gilt unter einer Bezugssystemänderung (3.3):*

$$\begin{aligned} \rho^*(t^*, \mathbf{x}^*) &= \rho(t, \mathbf{x}), & h^*(t^*, \mathbf{x}^*) &= h(t, \mathbf{x}), & e^*(t^*, \mathbf{x}^*) &= e(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{t}^*(t^*, \mathbf{x}^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{t}(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Forminvarianz

Physikalische Gesetze sind unabhängig vom Bezugssystem. Dies ist die Konsequenz dessen, dass man nicht in der Lage ist, ein bevorzugtes Bezugssystem zu finden, oder anders, dass es unmöglich ist, durch Experimente innerhalb eines Bezugssystems die relative Bewegung dieses Bezugssystems bezüglich eines anderen Bezugssystems zu bestimmen. Darüber gibt das PFI (Principle of form invariance) Auskunft:

3.17 Prinzip (Prinzip der Forminvarianz). *Ein physikalisches Gesetz hat in zwei beliebigen Bezugssystemen die gleiche Form, d.h. es ist invariant unter Bezugssystemänderungen. Hierbei wird vorausgesetzt, dass sich die spezifischen Volumenquellen unter Bezugssystemänderungen (3.3) wie folgt transformieren:*

$$\begin{aligned} r^*(t^*, \mathbf{x}^*) &= r(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{b}^*(t^*, \mathbf{x}^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{b}(t, \mathbf{x}) + \ddot{\mathbf{c}}(t) + 2\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{v}(t) + \ddot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die letzten 3 Terme in (3.18)₂ sind sogenannte *Scheinkräfte*, die durch Beschleunigungen in der Bezugssystemänderung auftreten. Sie beinhalten insbesondere die Corioliskraft und Zentrifugalkräfte. Man beachte, dass die Terme für Galilei-Transformationen verschwinden und somit die Volumenkräfte unter Galilei-Transformationen objektiv sind.

Man kann leicht überprüfen, dass das Massenerhaltungsgesetz

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

(vgl. (1.6)) das Prinzip der Forminvarianz erfüllt. In der Tat, das Prinzip der Objektivität besagt, dass ρ objektiv ist. Weiter sind materielle Zeitableitungen objektiver Skalare objektiv und (3.14) zeigt, dass $\operatorname{div} \mathbf{v}$ objektiv ist.

3.4 Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung

Wir wollen nun zeigen, dass aus der Energieerhaltung sowie den Prinzipien der Objektivität und der Forminvarianz *alle* weiteren Erhaltungssätze folgen. Wir zeigen zuerst, dass man für eine skalare Oberflächengröße einen Flussvektor definieren kann.

4.1 Satz (Cauchy). *Sei χ eine Bewegung eines Körpers \mathcal{B} und gelte für beliebige Teile V des Körpers (der Erhaltungssatz)*

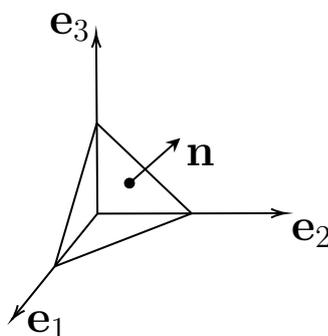
$$\int_{V_t} b(t, \mathbf{x}) dx = \int_{\partial V_t} c(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) do, \quad (4.2)$$

wobei \mathbf{n} die äussere Einheitsnormale von ∂V_t ist und b, c hinreichend glatte skalare Funktionen sind. Dann gibt es ein eindeutiges Vektorfeld \mathbf{c} , sodass

$$c(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{c}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.3)$$

BEWEIS: Wir fixieren eine Zeit t_0 , wählen einen beliebigen Punkt \mathbf{x}_0 im Innern des Körpers und heften dort ein Standard-Koordinatensystem an. Der Punkt \mathbf{x}_0 ist dann O ; eine Ebene mit der Einheitsnormalen \mathbf{n} schneide die Koordinatenachsen in A, B und C . Wir setzen für die Flächen des entstehenden Tetraeders V_h

$$\sigma^h := \Delta ABC, \quad \sigma_1^h := \Delta OBC, \quad \sigma_2^h := \Delta OAC, \quad \sigma_3^h := \Delta OAB.$$



Ist h der Abstand von O zu ΔABC , so gilt

$$\text{vol}(V_h) = \frac{1}{3} h |\sigma^h| = \frac{1}{3} |OA| |\sigma_1^h|. \quad (4.4)$$

Wir definieren die Komponenten n^j via $\mathbf{n} =: n^j \mathbf{e}_j$. Es gilt nun $n^1 = \frac{n^1}{|\mathbf{n}|} = \cos \angle(\mathbf{n}, OA) = \frac{h}{|OA|}$. Wir setzen dies in (4.4) ein und erhalten $|\sigma_1^h| = |\sigma^h| n^1$. Völlig analog folgt

$$|\sigma_i^h| = |\sigma^h| n^i. \quad (4.5)$$

Aufgrund der Glattheit der skalaren Funktionen und der Glattheit der Bewegung erhalten wir mit einer Konstanten M

$$\left| \int_{V_h} b \, dx \right| \leq M \text{vol}(V_h) = \frac{M}{3} h |\sigma^h| \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma^h|} \left| \int_{V_h} b \, dx \right| = 0.$$

Somit folgt wegen Voraussetzung (4.2) auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma^h|} \left| \int_{\partial V_h} c(t_0, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \, do \right| = 0.$$

Wir definieren nun den Vektor \mathbf{c} komponentenweise (bzgl. der Standardbasis \mathbf{e}_i) durch

$$\hat{c}^i(t_0, \mathbf{x}) := c(t_0, \mathbf{x}, -\mathbf{e}_i).$$

Dann haben wir

$$\int_{\partial V_h} c \, do = \sum_j \int_{\sigma_j^h} \hat{c}^j \, do + \int_{\sigma^h} c \, do.$$

Weiter gilt mit (4.5) und der Glattheit von c :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma^h|} \int_{\sigma_j^h} \hat{c}^j \, do = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n^j}{|\sigma_j^h|} \int_{\sigma_j^h} \hat{c}^j \, do = \hat{c}^j(t_0, \mathbf{x}_0) n^j,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma^h|} \int_{\sigma^h} c(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, do = c(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}).$$

Daraus folgt

$$0 = c(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}) + \hat{c}^j(t_0, \mathbf{x}_0) n^j \implies c(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{c}(t_0, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n},$$

da $\hat{c}^i(t_0, \mathbf{x}_0) = -c(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{e}_i)$. □

4.6 Satz (Green, Rivlin). *Sei χ eine Bewegung eines Körpers \mathcal{B} und gelte für beliebige Teile V des Körpers die Energieerhaltung (2.6). Dann folgt aus den Prinzipien der Objektivität und der Forminvarianz, dass*

1. ein objektiver **Spannungstensor** \mathbf{T} und ein objektiver **Wärmeflußvektor** \mathbf{q} existieren, so dass für alle t und $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$

$$\mathbf{t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x})\mathbf{n}, \quad h(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (4.7)$$

2. die Massenerhaltung in der Form (1.3) gilt,

3. die **Impulserhaltung**²

$$\int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \, dx - \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \, do = \int_{V_t} \rho \mathbf{b} \, dx, \quad (4.8)$$

$$\int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \, dx - \int_{V_t} \mathbf{div} \mathbf{T} \, dx = \int_{V_t} \rho \mathbf{b} \, dx \quad (4.9)$$

für beliebige Teile V des Körpers \mathcal{B} und alle t gilt,

4. die **Drehimpulserhaltung**

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{T}^\top(t, \mathbf{x}) \quad (4.10)$$

für alle t und $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ gilt.

5. die reduzierte Form der **Energieerhaltung**

$$\int_{V_t} \rho \dot{e} \, dx - \int_{V_t} \mathbf{div} \mathbf{q} \, dx = \int_{V_t} \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r \, dx \quad (4.11)$$

für beliebige Teile V des Körpers \mathcal{B} und alle t gilt.

BEWEIS: Ad 1: Mit dem Transporttheorem Satz 2.15 folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{V_t} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \, dx \right) &= \frac{1}{2} \int_{V_t} (\rho |\mathbf{v}|^2)^\cdot + \rho |\mathbf{v}|^2 \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{V_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dx, \\ \frac{d}{dt} \left(\int_{V_t} \rho e \, dx \right) &= \int_{V_t} (\rho e)^\cdot + \rho e \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{V_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) e + \rho \dot{e} \, dx. \end{aligned}$$

²Der Vektor $\mathbf{div} \mathbf{T}$ ist komponentenweise definiert als $(\partial_j T_j^i)_i$.

Somit hat die Energieerhaltung die Form

$$\begin{aligned} & \int_{V_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \rho (\dot{e} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) dx \\ &= \int_{V_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r dx + \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h do. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sei eine Bezugssystemänderung in Form einer Galilei-Transformation

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \quad t^* = t$$

gegeben. Das Prinzip der Forminvarianz für die Energieerhaltung liefert dann im transformierten Bezugssystem

$$\begin{aligned} & \int_{V_t^*} (\dot{\rho}^* + \rho^* \operatorname{div}^* \mathbf{v}^*) \left(e^* + \frac{1}{2} |\mathbf{v}^*|^2 \right) + \rho^* (\dot{e}^* + \mathbf{v}^* \cdot \dot{\mathbf{v}}^*) dx^* \\ &= \int_{V_t^*} \rho^* \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{v}^* + \rho^* r^* dx^* + \int_{\partial V_t^*} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v}^* + h^* do^*, \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei $\mathbf{b}^* = \mathbf{Q}\mathbf{b}$ und $r^* = r$. Die Transformation besteht aus Translation und Rotation, d.h. Volumen und Flächen bleiben erhalten. Somit haben wir $dx^* = dx$ und $do^* = do$. Wählen wir t_0 beliebig, aber fest, und setzen $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ sowie $\mathbf{c}t_0 = -\mathbf{d}$, so erhalten wir $V_{t_0}^* = V_{t_0}$ und

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}t_0 + \mathbf{d} = \mathbf{x}.$$

Für diese Transformationen haben wir $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathbf{c}$, $\dot{\mathbf{v}}^* = \dot{\mathbf{v}}$ und $\operatorname{div}^* \mathbf{v}^* = \operatorname{div} \mathbf{v}$. Das Prinzip der Objektivität liefert $\rho^* = \rho$, $e^* = e$, $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}$ und $h^* = h$. Somit folgt durch Subtraktion von (4.13) und (4.12)

$$\int_{V_{t_0}} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{2} |\mathbf{c}|^2 \right) dx = \int_{V_{t_0}} \rho (\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{c} dx + \int_{\partial V_{t_0}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{c} do. \quad (4.14)$$

Wenn man nun $\mathbf{c} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, wählt, erhält man eine Gleichung für t^i . Aus dem Satzes von Cauchy (Satz 4.1) folgt dann die Existenz von Vektoren \mathbf{a}^i mit

$$t^i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{n} = a_j^i n^j$$

und somit gilt für den Spannungstensor $\mathbf{T} := (a_j^i)_j^i$ die Beziehung $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$. Dass der Spannungsvektor objektiv ist, impliziert, dass auch der Spannungstensor objektiv ist, d.h.

$$\mathbf{T}^*(t^*, \mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(t, \mathbf{x})\mathbf{Q}^\top(t). \quad (4.15)$$

In der Tat, da Normalen objektiv sind, d.h. $\mathbf{n}^* = \mathbf{Q}\mathbf{n}$, und \mathbf{Q} orthogonal ist, erhalten wir

$$\mathbf{T}^* \mathbf{n}^* = \mathbf{t}^* = \mathbf{Q}\mathbf{t} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\top \mathbf{n}^*.$$

Da \mathbf{n}^* beliebig ist, folgt (4.15). Mit dem Satz von Gauß können wir den Oberflächenterm in (4.12) mit \mathbf{t} in einen Volumenterm umformen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, do &= \int_{\partial V_t} (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, do = \int_{\partial V_t} T_j^i n^j v^i \, do \\ &= \int_{V_t} \partial_j (T_j^i v^i) \, dx = \int_{V_t} \operatorname{div} (\mathbf{T}^\top \mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wenn man dies in (4.12) einsetzt, kann man wiederum den Satz von Cauchy anwenden und erhält die Existenz eines Wärmeflußvektors \mathbf{q} , sodass $h = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$. Auch der Wärmeflußvektor ist objektiv, d.h.

$$\mathbf{q}^*(t^*, \mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{q}(t, \mathbf{x}). \quad (4.17)$$

In der Tat, da Normalen und der Wärmefluß objektiv sind, erhalten wir

$$\mathbf{q}^* \cdot \mathbf{n}^* = h^* = h = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}^\top \mathbf{n}^* = (\mathbf{Q} \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}^*.$$

Da \mathbf{n}^* beliebig ist, folgt (4.17). Der Satz von Gauß ermöglicht es wiederum, auch den Oberflächenterm in (4.12) mit h in einen Volumenterm umzuformen, denn

$$\int_{\partial V_t} h \, do = \int_{\partial V_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, do = \int_{V_t} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx. \quad (4.18)$$

Ad 2: Wenn wir nun in (4.14) $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{u}$, wobei \mathbf{u} ein beliebiger Einheitsvektor ist, wählen und die resultierende Gleichung zweimal nach λ differenzieren, erhalten wir

$$\int_{V_{t_0}} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0. \quad (4.19)$$

Dies ist die Massenerhaltung (1.3).

Ad 3: Aus (1.3) folgt mit den üblichen Argumenten die lokale Form der Massenerhaltung (1.6). Somit ist die linke Seite von (4.14) identisch Null. Da \mathbf{c} ein beliebiger konstanter Vektor ist, kann er aus dem Integral herausgezogen werden und es folgt

$$\left(\int_{V_{t_0}} \rho (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) \, dx - \int_{\partial V_{t_0}} \mathbf{t} \, do \right) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad \forall \mathbf{c}.$$

Da auch t_0 beliebig gewählt war, folgt daraus sofort die Impulserhaltung (4.8). Der Satz von Gauß liefert

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \, do &= \int_{\partial V_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \, do = \left(\int_{\partial V_t} T_j^i n^j \, do \right)_i \\ &= \left(\int_{V_t} \partial_j T_j^i \, dx \right)_i = \int_{V_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \, dx, \end{aligned} \quad (4.20)$$

und damit die Impulserhaltung in der Form (4.9). Mit den üblichen Argumenten erhalten wir auch wieder die lokale Form der Impulserhaltung

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{div} \mathbf{T} = \rho \mathbf{b}. \quad (4.21)$$

Ad 4: Es bleibt die Drehimpulserhaltung herzuleiten. Aus (4.16) folgt

$$\int_{\partial V_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_{V_t} \mathbf{div} (\mathbf{T}^\top \mathbf{v}) \, dx = \int_{V_t} (\mathbf{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \, dx. \quad (4.22)$$

Wenn man dies und (4.18) in (4.12) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{V_t} (\dot{\rho} + \rho \mathbf{div} \mathbf{v}) \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) + \rho \dot{e} \, dx \\ &= \int_{V_t} (\rho \mathbf{b} + \mathbf{div} \mathbf{T} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \rho r \, dx + \int_{V_t} \mathbf{div} \mathbf{q} \, dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wenn man nun lokale Form der Massenerhaltung (1.6) und die lokale Form der Impulserhaltung (4.21) benutzt, erhält man die reduzierte Form der Energieerhaltung

$$\int_{V_t} \rho \dot{e} - \mathbf{div} \mathbf{q} \, dx = \int_{V_t} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} + \rho r \, dx. \quad (4.24)$$

Diese Gleichung ist natürlich auch forminvariant und somit folgt für eine Bezugssystemänderung der Form

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}, \quad t^* = t$$

auch

$$\int_{V_t^*} \rho^* \dot{e}^* - \mathbf{div}^* \mathbf{q}^* \, dx^* = \int_{V_t} \mathbf{T}^* : \nabla^* \mathbf{v}^* + \rho^* r^* \, dx^*, \quad (4.25)$$

wobei $r^* = r$. Wir haben wiederum $dx^* = dx$. Wählen wir t_0 beliebig, aber fest, und setzen $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$, erhalten wir $V_{t_0}^* = V_{t_0}$. Für diese Transformationen haben wir $\nabla^* \mathbf{v}^*(t_0) = \nabla \mathbf{v}(t_0) + \dot{\mathbf{Q}}(t_0)$, wobei $\dot{\mathbf{Q}}$ antisymmetrisch ist (vgl. (3.13)). Das Prinzip der Objektivität liefert $\rho^* = \rho$, $e^* = e$ und $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$. Somit folgt, da materielle Zeitableitungen objektiver, skalarer Größen und Gradienten objektiver Größen objektiv sind,

$$\int_{V_{t_0}} \mathbf{T} : \dot{\mathbf{Q}} \, dx = 0. \quad (4.26)$$

Dies impliziert wiederum die punktweise Gleichung $\mathbf{T}(t_0, \mathbf{x}) : \dot{\mathbf{Q}}(t_0) = 0$. Da $\dot{\mathbf{Q}}(t_0)$ ein beliebiger antisymmetrischer Tensor ist, muss $\mathbf{T}(t_0, \mathbf{x})$ symmetrisch sein. Da auch t_0 beliebig war, erhalten wir

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^\top.$$

Ad 5: Aus (4.24) und $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\top$ folgt sofort $\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = \mathbf{T} : \mathbf{D}$, woraus die Behauptung folgt. \square

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die lokale Form der reduzierten Energieerhaltung an, die aus (4.24) auf die üblich Art folgt, wenn man zusätzlich benutzt, dass \mathbf{T} symmetrisch ist. Es gilt

$$\rho \dot{e} - \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r, \quad (4.27)$$

wobei \mathbf{D} der symmetrische Teil des Geschwindigkeitsgradienten ist.

Jetzt können wir erklären, wie das Transformationsverhalten von \mathbf{b} zustande kommt. Aus (3.3) folgt, da \mathbf{Q} orthogonal ist,

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^\top (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_m}{\partial x_j^*} = \frac{\partial}{\partial x_j^*} \sum_k Q_{km} (x_k^* - c_k) = \sum_k Q_{km} \delta_{kj} = Q_{jm}.$$

Wir rechnen nun nach, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^* \mathbf{T}^* &= \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j^*} T_{ij}^* \right)_i = \left(\sum_{jkl} \frac{\partial (Q_{ik} Q_{jl} T_{kl})}{\partial x_j^*} \right)_i = \left(\sum_{jkl} Q_{ik} Q_{jl} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_j^*} \right)_i \\ &= \left(\sum_{klm} Q_{ik} \underbrace{\sum_j Q_{jl} Q_{jm}}_{=\delta_{lm}} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_m} \right)_i = \left(\sum_{kl} Q_{ik} \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \right)_i = \mathbf{Q} \operatorname{div} \mathbf{T}^\top = \mathbf{Q} \operatorname{div} \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{div} \mathbf{T}$ objektiv und wegen

$$\rho^* \dot{\mathbf{v}}^* - \operatorname{div}^* \mathbf{T}^* = \rho^* \mathbf{b}^*$$

muss auch $\rho^* (\dot{\mathbf{v}}^* - \mathbf{b}^*)$ objektiv sein, also $\rho^* (\dot{\mathbf{v}}^* - \mathbf{b}^*) = \rho \mathbf{Q} (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b})$ und es folgt:

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q} \mathbf{b} + \dot{\mathbf{v}}^* - \mathbf{Q} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \mathbf{b} + \ddot{\mathbf{c}} + 2\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{v} + \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{x}.$$

Dies ist genau (3.18)₂.

Insgesamt stehen uns nun folgende partiellen Differentialgleichungen zur Verfügung

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{e} - \operatorname{div} \mathbf{q} &= \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \mathbf{T} &= \rho \mathbf{b}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^\top. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hinzutreten müssen noch Materialgesetze und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen.

3.5 Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Wir haben bereits die Energieerhaltung und deren Konsequenzen diskutiert. Die Energieerhaltung beschreibt, wie die einzelnen Energieformen ineinander überführt werden. Das Resultat waren die Gleichungen (4.28). Dabei sind die Gleichungen symmetrisch, d.h. die Umwandlung von mechanischer Energie in thermische Energie ist gleichberechtigt mit der Umwandlung von thermischer Energie in mechanische. Anders gesagt: die Prozesse sind reversibel (man kann sich dies auch als zeitliche Umkehrung vorstellen).

Unsere Beobachtungen und Erfahrungen legen allerdings nahe, dass dies nicht so ist. Es scheint so, dass die Natur die Umwandlung nichtthermischer Energie in thermische Energie bevorzugt. Das heißt insbesondere, dass thermodynamische Prozesse in der Regel nicht reversibel sind. Um dies auch in der mathematischen Theorie zu verankern, wurde der Begriff der Entropie eingeführt.

Bei der Konstruktion der Entropie und der Herleitung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik gibt es viele Probleme. Diese wurzeln darin, dass, wie bereits in der Einleitung diskutiert wurde, was als Thermodynamik bezeichnet wird, oft nur Quasi-Gleichgewichts-Thermodynamik oder Thermostatik ist. Mit der dort getroffenen Annahme, dass sich Teilchen in lokalem thermodynamischen Gleichgewicht mit den Teilchen in ihrer Umgebung befinden, konnten wir unsere Überlegungen auch auf dynamische Prozesse anwenden. Allerdings sind manche der den dynamischen Prozessen vorbehaltenen Phänomene (wie die Irreversibilität) nicht vollständig aus unserem statischen Modell heraus erklärbar, sodass weitere Annahmen erforderlich sind.

Eine gute Darstellung und Einführung der Entropie ist die informationstheoretische Herleitung, wonach Entropie gleich dem Maß an fehlenden Informationen ist. Alternativ kann man dem Zugang von Caratheodory folgen, der Entropie aus Temperatur und Wärme herleitet.

Wir wollen hier die formale Struktur der Theorie darstellen und Entropie als primitive Größe betrachten (nach Gibbs), d.h. wie auch bei der Temperatur wird ihre formale Existenz vorausgesetzt und eine physikalische Verifikation bleibt zunächst offen. Dies ist nicht immer zufriedenstellend (vor allem, da wir keine Definition solcher Größen angeben können), aber passt in die Gesamtdarstellung und verträgt sich gut mit dem Rest unserer Theorie. Zudem sind die daraus gewonnenen Ergebnisse durch Experimente überprüfbar.

Wir nehmen an, es gibt N Parameter γ_α , $\alpha = 1, \dots, N$, die die innere Energie e beeinflussen und a priori bekannt sind. Die Menge $\{\gamma_\alpha\}_1^N$ heißt *thermodynamischer Unterzustand*. Wie stellen uns vor, dass γ_α Größen wie spezifisches Volumen V , Deformationsgradient \mathbf{F} und Dichte ρ beschreibt.

Um die innere Energie zu bestimmen, muss zur mechanischen Information

noch eine thermodynamische Information hinzukommen. Dies motiviert das folgende Axiom:

5.1 Prinzip (Grundprinzip der Thermodynamik). *Es gibt eine skalare Funktion, die Entropie η , so dass thermodynamische Unterzustand zusammen mit der Entropie η die innere Energie eindeutig bestimmt, und zwar unabhängig von der Bewegung, d.h.*

$$e = f(\eta, \gamma_\alpha). \quad (5.2)$$

Diese Zustandsgleichung ist abhängig vom Material.

Jede Wahl von f definiert eine thermodynamische Substanz. Man beachte, dass f auch zusätzlich vom Teilchen P abhängen kann. Wir vernachlässigen dies in der Regel.

Der Unterschied zwischen γ_α und η ist, dass $\dim[\eta]$ unabhängig von Länge, Masse und Zeit ist. Die γ_α sind mechanische Größen, während η eine thermodynamische Größe ist. Entropie ist eine additive Materialeigenschaft wie z.B. die Masse.

In einer gegebenen Bewegung hängt die innere Energie natürlich von Ort und Zeit ab, d.h. $e = e(t, \mathbf{X}) = e(t, \mathbf{x})$. Das Prinzip 5.1 besagt also insbesondere, dass wir die innere Energie ohne genaue Kenntnis der Bewegung aus dem thermodynamischen Unterzustand und der Entropie bestimmen können. Insbesondere können der thermodynamische Unterzustand und die Entropie in einem Teilchen zu einem Zeitpunkt in verschiedenen Bewegungen gleich sein. Somit besagt das Prinzip 5.1, dass die innere Energie unabhängig von der Bewegung aus apriori bekannten Größen berechnet werden kann. In einer Bewegung hängt der thermodynamische Unterzustand und die Entropie natürlich auch von Ort und Zeit ab, d.h. $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(t, \mathbf{x})$, $\eta = \eta(t, \mathbf{x})$.

Wir definieren die *absolute Temperatur* θ und die *thermodynamischen Spannungen* τ_α via

$$\theta := \frac{\partial e}{\partial \eta}, \quad \tau_\alpha := \frac{\partial e}{\partial \gamma_\alpha}. \quad (5.3)$$

Somit sind beide auch Funktionen von η und γ_α , d.h.

$$\theta = \theta(\eta, \gamma_\alpha), \quad \tau_\alpha = \tau_\alpha(\eta, \gamma_\alpha). \quad (5.4)$$

Wenn wir ein Teilchen fixieren und die zeitliche Veränderung während einer Bewegung betrachten, erhalten wir:

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial \eta} \dot{\eta} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial e}{\partial \gamma_\alpha} \dot{\gamma}_\alpha = \theta \dot{\eta} + \sum_{\alpha=1}^N \tau_\alpha \dot{\gamma}_\alpha. \quad (5.5)$$

Wir nehmen wie immer an, dass f in (5.2) schön ist, und dass man diese Funktion und ihre partiellen Ableitungen invertieren und nach den einzelnen Variablen auflösen kann (im Sinne des Satzes über implizite Funktionen). Wenn wir (5.2) invertieren, erhalten wir

$$\eta = \eta(e, \gamma_\alpha). \quad (5.6)$$

Wenn wir (5.4)₁ invertieren, erhalten wir

$$\eta = \eta(\theta, \gamma_\alpha), \quad (5.7)$$

und wenn man (5.7) in (5.2) einsetzt erhält man

$$e = e(\theta, \gamma_\alpha). \quad (5.8)$$

Die richtige Wahl der Variablen zur Beschreibung der Energie hängt von der Situation ab. Mit Hilfe von Legendre-Transformationen führen wir weitere mit der inneren Energie zusammenhängende Größen ein, nämlich die *freie Energie*, die *Enthalpie* und die *freie Enthalpie*. Diese Größen sind wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll} \text{freie Energie} & \psi := e - \eta\theta, \\ \text{Enthalpie} & \chi := e - \sum \tau_\alpha \gamma_\alpha, \\ \text{freie Enthalpie} & \xi := \chi - \eta\theta. \end{array} \quad (5.9)$$

Wenn man die materielle Zeitableitung der freien Energie ψ berechnet und (5.5) einsetzt, erhält man

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\eta}\theta - \eta\dot{\theta} = -\eta\dot{\theta} + \sum \tau_\alpha \dot{\gamma}_\alpha, \quad (5.10)$$

d.h. ψ ist natürlicherweise eine Funktion von θ und γ_α . Analoge Rechnungen liefern

$$\dot{\chi} = \theta\dot{\eta} - \sum \gamma_\alpha \dot{\tau}_\alpha, \quad (5.11)$$

$$\dot{\xi} = -\eta\dot{\theta} - \sum \gamma_\alpha \dot{\tau}_\alpha. \quad (5.12)$$

Insgesamt haben wir

$$e = e(\eta, \gamma_\alpha), \quad \psi = \psi(\theta, \gamma_\alpha), \quad \chi = \chi(\eta, \tau_\alpha), \quad \xi = \xi(\theta, \tau_\alpha). \quad (5.13)$$

Die "freie Energie" hat folgende Interpretation: Wenn die absolute Temperatur θ konstant ist, so ist die freie Energie ψ der Teil der Energie, der zur Arbeit zur Verfügung steht. Wichtig ist, dass die γ_α rein mechanische Größen

sind, wie z.B. die Dichte ρ oder der Deformationsgradient \mathbf{F} . Aus dem Vergleich der partiellen Ableitungen der einzelnen Potentiale erhält man:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial e}{\partial \eta}, & \boldsymbol{\tau}_\alpha &= \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\alpha}, \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, & \boldsymbol{\tau}_\alpha &= \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}_\alpha}, \\ \theta &= \frac{\partial \chi}{\partial \eta}, & \boldsymbol{\gamma}_\alpha &= -\frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha}, \\ \eta &= -\frac{\partial \xi}{\partial \theta}, & \boldsymbol{\gamma}_\alpha &= -\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{\tau}_\alpha}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

In einer Bewegung eines Körpers haben wir nun zwei Gleichungen, die die innere Energie erfüllen muss, nämlich (5.5) und (4.27)

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \theta \dot{\eta} + \sum_{\alpha} \boldsymbol{\tau}_\alpha \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha, \\ \rho \dot{e} &= \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r + \operatorname{div} \mathbf{q} =: P_E + Q_E. \end{aligned}$$

Hierbei ist $P_E := \mathbf{T} : \mathbf{D}$ die *äußere Spannungsleistung* und $Q_E := \rho r + \operatorname{div} \mathbf{q}$ der *äußere nicht-mechanische Energiezuwachs*. Andererseits ist

$$\rho \dot{e} = \rho \sum_{\alpha} \boldsymbol{\tau}_\alpha \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha + \rho \theta \dot{\eta} =: P_I + Q_I,$$

wobei $P_I := \rho \sum_{\alpha} \boldsymbol{\tau}_\alpha \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha$ die *Leistung der inneren Spannungen* ist und $Q_I := \rho \theta \dot{\eta}$ der *innere nicht-mechanische Energiezuwachs* ist. Der Index E steht für "external", I steht für "internal". Es gilt nun insbesondere, dass

$$P_E - P_I + Q_E - Q_I = 0$$

oder

$$\rho \theta \dot{\eta} = P_E - P_I + Q_E. \quad (5.15)$$

Hieraus sieht man, dass nur die Differenz aus äußerer und innerer Leistung zur Veränderung der Entropie beiträgt.

Wir definieren die *totale Entropie* als

$$\mathcal{H}(V_t) := \int_{V_t} \rho \eta \, dx. \quad (5.16)$$

Mit Hilfe des Transportsatzes und der Massenerhaltung bekommen wir

$$\dot{\mathcal{H}} = \int_{V_t} \dot{\rho} \eta + \rho \dot{\eta} + \rho \eta \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{V_t} \rho \dot{\eta} \, dx. \quad (5.17)$$

Aus (5.15) ergibt sich

$$\rho \dot{\eta} = \frac{P_E - P_I}{\theta} + \frac{Q_E}{\theta}, \quad (5.18)$$

wobei man den letzten Summanden schreiben kann als

$$\frac{Q_E}{\theta} = \rho \frac{r}{\theta} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2}. \quad (5.19)$$

Dies beides eingesetzt in (5.17) und der Satz von Gauß liefert

$$\dot{\mathcal{H}} = \int_{V_t} \rho \dot{\eta} dx = \int_{V_t} \frac{P_E - P_I}{\theta} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} + \rho \frac{r}{\theta} dx + \int_{\partial V_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} do. \quad (5.20)$$

Wir postulieren:

5.21 Prinzip (2. Hauptsatz der Thermodynamik). *Für jeden beliebigen Teil V eines Körpers \mathcal{B} gilt in jeder beliebigen Bewegung*

$$\int_{V_t} \rho \dot{\eta} dx \geq \int_{V_t} \rho \frac{r}{\theta} dx + \int_{\partial V_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} do. \quad (5.22)$$

Bis heute liegt kein Beweis des 2. Hauptsatzes in voller Allgemeinheit vor. Der Satz stimmt jedoch überein mit experimentellen Untersuchungen und ist konsistent mit der übrigen Theorie und es besteht kein Zweifel an seiner Gültigkeit. Anschaulich sagt er, dass die Änderung der totalen Entropie in einem Bereich V niemals kleiner ist als die Summe aus Entropie, die durch externe Quellen und über die Oberfläche zugeführt wird.

Da die Forderung (5.22) eine Ungleichung für die zeitliche Änderung einer Größe (der totalen Entropie) ist, wird eine Tendenz in der Zeit für die möglichen Bewegungen gefordert. Dies bricht einerseits die Symmetrie in der Energieerhaltung und bevorzugt die Umwandlung von nicht-thermischer Energie in thermische Energie und schließt gleichzeitig die Zeitumkehr in den Bewegungen aus.

Die Forderung ist motiviert durch folgende Beobachtungen: Falls es keine Wärmequellen gibt, d.h. $r = 0$, und die Temperatur homogen ist, d.h. $\theta = \text{const.}$, dann kann ein Körper nicht alle zugeführte mechanische Arbeit (äußere Arbeit) speichern (in innere überführen), vgl. z.B. einen Ping-Pong-Ball oder ein Pendel. Mathematisch heißt dies

$$\theta = \text{const.} \ \& \ r = 0 \quad \implies \quad P_E - P_I \geq 0.$$

Falls ein Körper in Ruhe ist und es keine Wärmequellen gibt, dann geht der Wärmefluss von warm nach kalt, d.h. $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0$. Mathematisch heißt

dies (wenn ein Körper in Ruhe ist, verschwinden alle mechanischen Größen, z.B. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F} = \mathbf{D} = \mathbf{0}$)

$$P_E - P_I = 0 \ \& \ r = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0.$$

Aus dem 2. Hauptsatz und dem Satz von Gauß folgt mit den üblichen Argumenten die lokale Form der 2. Hauptsatzes

$$\rho \dot{\eta} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0, \quad (5.23)$$

die üblicherweise unter dem Namen *Clausius-Duhem-Ungleichung* bekannt ist. Dies zusammen mit (5.18) und (5.19) liefert die sogenannte *Dissipationsungleichung*

$$\frac{P_E - P_I}{\theta} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} \geq 0. \quad (5.24)$$

Umgekehrt folgt aus (5.24), (5.18) und (5.19) auch wieder (5.23). Also sind die Clausius-Duhem-Ungleichung und die Dissipationsungleichung äquivalent. Wir sehen somit auch, dass der 2. Hauptsatz eine Verallgemeinerung der obigen Beobachtungen auf alle Bewegungen ist.

Mithilfe von (5.9) und (4.27) kann man (5.23) umschreiben zu

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} - \rho \eta \dot{\theta} \geq \rho \dot{\psi}, \quad (5.25)$$

einer Form der Clausius-Duhem-Ungleichung, die oftmals praktisch ist. Aus der Darstellung

$$P_E - P_I = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \sum_{\alpha} \tau_{\alpha} \dot{\gamma}_{\alpha}$$

folgt, dass die Dissipationsungleichung (5.24) äquivalent zu

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} - \rho \sum_{\alpha} \tau_{\alpha} \dot{\gamma}_{\alpha} \geq 0 \quad (5.26)$$

ist.

3.6 Materialgesetze

Aus der Gültigkeit des 1. und 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, den Prinzipien der Objektivität und der Forminvarianz sowie dem Grundprinzip der

Thermodynamik haben wir hergeleitet, dass Bewegungen eines Körpers folgendem System (lokale Form) genügen muss (vgl. (4.28), (5.25)):

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{e} - \operatorname{div} \mathbf{q} &= \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \mathbf{T} &= \rho \mathbf{b}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^\top, \\ \rho \dot{\psi} &\leq \mathbf{T} : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} - \rho \eta \dot{\theta}.\end{aligned}$$

Diese System hat viel mehr Unbekannte (31) als Gleichungen (12 skalare Gleichungen). Allerdings sind auch die Materialeigenschaften noch nicht im System kodiert. Wir wollen uns im Weiteren auf Flüssigkeiten und Gase beschränken. Wir nehmen an, dass

$$\theta, \rho, \mathbf{v}, \nabla \theta, \nabla \mathbf{v} \quad (6.1)$$

die *unbekannten Variablen* sind (vgl. (5.2), (5.8)) und dass wir Zustandsgleichungen oder *Materialgesetze* für

$$e, \psi, \eta, \mathbf{q}, \mathbf{T} \quad (6.2)$$

in der Form

$$f = \widehat{f}(\theta, \rho, \mathbf{v}, \nabla \theta, \nabla \mathbf{v}), \quad (6.3)$$

wobei f für jede der Größen in (6.2) steht, angeben. Man beachte, dass auf Grund von (5.9) η , ψ und e nicht unabhängig voneinander sind. Mit der Wahl (6.1) haben wir bereits eine Klasse von Materialien festgelegt und gesagt, dass Viskosität, Wärmeleitfähigkeit, Kompressibilität und Wärmeausdehnung einen Rolle spielen. Andererseits haben wir Effekte wie Elastizität ausgeschlossen. Solche Effekte sind z.B. für Wandfarbe oder Ketchup relevant. Um auch solche Materialien zu betrachten müssten wir noch den Deformationsgradienten \mathbf{F} als unabhängige Variable hinzunehmen.

Festkörper können analog behandelt werden, allerdings wählt man andere unabhängige Variablen.

Das Prinzip der Objektivität

Im Prinzip der Objektivität haben wir festgelegt, dass alle Materialeigenschaften objektiv, d.h. unabhängig vom Bezugssystem sein müssen. Also müssen die Materialeigenschaften (6.2) und die Materialgesetze (6.3) objektiv sein.

Sei

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t), \quad t^* = t, \quad (6.4)$$

eine Bezugssystemänderung, wobei $\mathbf{Q}(t)$ ein zeitabhängiger eigentlicher orthogonaler Tensor und $\mathbf{c}(t)$ ein zeitabhängiger Vektor ist. Das Prinzip der Objektivität fordert also, dass

$$\begin{aligned} e^* &= e, & \psi^* &= \psi, & \eta^* &= \eta, \\ \mathbf{q}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{q}, \\ \mathbf{T}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}\mathbf{Q}^\top(t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Hierbei haben wir die Notation $f^* = \widehat{f}(\theta^*, \rho^*, \mathbf{v}^*, \nabla^*\theta^*, \nabla^*\mathbf{v}^*)$, wobei f für jede der Größen in (6.2) steht, benutzt. Man beachte, dass ρ und θ Materialeigenschaften sind (η ist Materialeigenschaft, $\theta = \frac{\partial e(\eta, \gamma_\alpha)}{\partial \eta}$, durch invertieren wird η durch θ ersetzt, vgl. Abschnitt 3.5) und somit objektiv sind. Weiterhin ist der Gradient eines objektiven Skalars objektiv. Die Transformationen von \mathbf{v} und $\nabla\mathbf{v}$ sind in (3.8) und (3.10) zu finden.

Wir wollen nun die Konsequenzen von (6.5) exemplarisch am Beispiel des Spannungstensors diskutieren. Da $\mathbf{Q}(t)$ orthogonal ist, gilt also

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \mathbf{v}, \nabla\theta, \nabla\mathbf{v}) &= \mathbf{Q}^\top(t)\widehat{\mathbf{T}}(\theta^*, \rho^*, \mathbf{v}^*, \nabla^*\theta^*, \nabla^*\mathbf{v}^*)\mathbf{Q}(t), \\ &= \mathbf{Q}^\top(t)\widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \mathbf{Q}(t)\mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x}, \mathbf{Q}(t)\nabla\theta, \\ &\quad \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}\mathbf{Q}^\top(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^\top(t))\mathbf{Q}(t). \end{aligned}$$

Dies muss für alle orthogonalen Tensoren $\mathbf{Q}(t)$, alle Vektoren $\mathbf{c}(t)$, jeden Zeitpunkt und alle Orte gelten. Wir wählen einen beliebigen Zeitpunkt t_0 und einen beliebigen Punkt \mathbf{x}_0 . Weiter wählen wir $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{c}(t)$ so, dass $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{Q}}(t_0) = -\mathbf{W}(t_0, \mathbf{x}_0)$, den antisymmetrischen Teil des Geschwindigkeitsgradienten $\nabla\mathbf{v}(t_0, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{W}(t_0, \mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}(t_0, \mathbf{x}_0)$, und erhalten in (t_0, \mathbf{x}_0)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \mathbf{v}, \nabla\theta, \nabla\mathbf{v}) &= \widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \mathbf{0}, \nabla\theta, \nabla\mathbf{v} - \mathbf{W}) \\ &= \widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \mathbf{0}, \nabla\theta, \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Da \mathbf{D} objektiv ist, ist eine weitere Reduktion nicht möglich. Somit haben wir gezeigt, dass \mathbf{T} (und analog auch die anderen Materialgesetze) nicht von der Geschwindigkeit \mathbf{v} abhängen können, und die Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten nur durch \mathbf{D} realisiert werden kann. Wir ersetzen also (6.1) durch

$$\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D} \quad (6.6)$$

und (6.3) durch

$$f = \widehat{f}(\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D}), \quad (6.7)$$

wobei f für jede der Größen in (6.2) steht.

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Wir wollen nun die Konsequenzen des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem Ungleichung (5.25) diskutieren.

Da ψ eine Funktion von $\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D}$ ist, können wir $\dot{\psi}$ in (5.25) berechnen und erhalten

$$(\mathbf{T} + \rho^2 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \mathbf{I}) : \mathbf{D} - \rho \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\nabla\theta} (\nabla\theta)^\cdot - \rho \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla\theta}{\theta} \geq 0,$$

wobei wir die Massenerhaltung benutzt haben. Da die Größen

$$\dot{\theta}, (\nabla\theta)^\cdot, \dot{\mathbf{D}}, \quad (6.8)$$

einerseits unabhängig von den Größen in (6.6) sind und andererseits beliebig gewählt werden können³, und die obige Ungleichung linear in (6.8) ist, erhalten wir sofort die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\theta} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{D}} = \mathbf{0}, \quad \eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \quad (6.9)$$

Also sind ψ, η , und somit auch e , nur Funktionen von ρ und θ . Außerdem haben wir wieder die Dissipationsungleichung

$$(\mathbf{T} + \rho^2 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \mathbf{I}) : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla\theta}{\theta} \geq 0 \quad (6.10)$$

hergeleitet.

Wir zerlegen nun \mathbf{T} und \mathbf{q} in einen Gleichgewichtsanteil und einen nicht-Gleichgewichtsanteil. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^E(\theta, \rho) &:= \widehat{\mathbf{q}}(\theta, \rho, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{q}^D(\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D}) &:= \widehat{\mathbf{q}}(\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D}) - \mathbf{q}^E(\theta, \rho), \\ \mathbf{T}^E(\theta, \rho) &:= \widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{T}^D(\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D}) &:= \widehat{\mathbf{T}}(\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D}) - \mathbf{T}^E(\theta, \rho). \end{aligned} \quad (6.11)$$

³Cf. COLEMAN, NOLL; TRUESDELL, NOLL. Man betrachtet den Prozess in einem beliebigen, aber festen Punkt in Zeit und Raum und dazu beliebige Quellterme.

Da (6.10) in jedem Prozess gelten muss, betrachten wir, für einen festen Materialpunkt \mathbf{X}_0 und zu einem festen Zeitpunkt t_0 , den Prozess $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$, $\rho(t, \mathbf{x})$, $\theta(t, \mathbf{x})$ und für $\alpha \in [0, 1]$ den zugehörigen Prozess $\bar{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X})$, $\bar{\rho}(t, \bar{\mathbf{x}})$, $\bar{\theta}(t, \bar{\mathbf{x}})$, definiert via

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}) &= \mathbf{x}((1 - \alpha)t_0 + \alpha t, \mathbf{X}), \\ \bar{\rho}(t, \bar{\mathbf{x}}) &= \rho(t, \mathbf{x}), \quad \bar{\theta}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \theta(t, (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{x}),\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{X}_0) = \bar{\mathbf{x}}(t_0, \mathbf{X}_0)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}(t, \bar{\mathbf{x}}) &= \alpha \mathbf{v}((1 - \alpha)t_0 + \alpha t, \mathbf{x}), \quad \bar{\nabla} \bar{\theta}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \alpha \nabla \theta(t, (1 - \alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{x}), \\ \bar{\mathbf{D}}(t, \bar{\mathbf{x}}) &= \alpha \mathbf{D}((1 - \alpha)t_0 + \alpha t, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

Somit stehen im Punkt (t_0, \mathbf{x}_0) die unabhängigen Variablen des alten Prozesses

$$\rho, \theta, \nabla \theta, \mathbf{D} \quad (6.12)$$

mit den unabhängigen Variablen des neuen Prozesses durch

$$\rho, \theta, \alpha \nabla \theta, \alpha \mathbf{D} \quad (6.13)$$

in Beziehung. Die Dissipationsungleichung (6.10) im neuen Prozess lautet

$$(\mathbf{T} + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I}) : \alpha \mathbf{D} + \frac{\alpha \mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0,$$

wobei \mathbf{T} und \mathbf{q} in (6.13) ausgewertet werden und ψ in ρ, θ ausgewertet wird. Wenn wir diese Ungleichung durch α teilen, erhalten wir im Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$

$$(\mathbf{T}^E + \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I}) : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{q}^E \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0.$$

Da die Materialgesetze in ρ, θ ausgewertet werden und die Ungleichung linear in $\nabla \theta, \mathbf{D}$ sind, welche beliebig gewählt werden können, erhalten wir

$$\mathbf{T}^E = -\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{I}, \quad \mathbf{q}^E = \mathbf{0}, \quad (6.14)$$

und die residuale Dissipationsungleichung

$$\mathbf{T}^D : \mathbf{D} + \frac{\mathbf{q}^D \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0. \quad (6.15)$$

Offensichtlich sind die Beziehungen (6.14) und (6.15) äquivalent zu (6.10).

Man nennt $p = p(\theta, \rho) := \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}(\theta, \rho)$ den *thermodynamischen Druck*, und hat demzufolge

$$\mathbf{T}(\theta, \rho, \nabla \theta, \mathbf{D}) = -p(\theta, \rho) \mathbf{I} + \mathbf{T}^D(\theta, \rho, \nabla \theta, \mathbf{D}). \quad (6.16)$$

Isotrope Funktionen

Wir haben gezeigt, dass die Materialgesetze für e , ψ , η , \mathbf{q} , \mathbf{T} Funktionen der Variablen θ , ρ , $\nabla\theta$, \mathbf{D} sind, diese Größen müssen allesamt objektiv sein. Mathematisch nennt man diese Eigenschaft Isotropie.

6.17 Definition. *Wir nennen e , \mathbf{q} , \mathbf{T} skalare, vektor- bzw. tensorwertige isotrope Funktionen, wenn für alle $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und alle orthogonalen Tensoren $\mathbf{Q} \in O(3)$ gilt*

$$\begin{aligned} e(s, \mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top) &= e(s, \mathbf{v}, \mathbf{A}), \\ \mathbf{q}(s, \mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top) &= \mathbf{Q}\mathbf{q}(s, \mathbf{v}, \mathbf{A}), \\ \mathbf{T}(s, \mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\top) &= \mathbf{Q}\mathbf{T}(s, \mathbf{v}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^\top. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Hervorzuheben ist, dass Bedingung (6.18) keine Forderung bzgl. der Abhängigkeit von skalaren Variablen stellt.

Für isotrope Funktionen lässt sich relativ genau sagen, wie diese aussehen (müssen). Diesen Schritt nennt man Klassifikation. Wir schauen uns einen Spezialfall genauer an, in dem die Funktion nur von einem Vektor abhängt:

6.19 Satz (Klassifikation isotroper Funktionen von einem Vektor). *Seien e , \mathbf{q} , \mathbf{T} skalare, vektorielle bzw. symmetrische tensorwertige Funktionen eines Vektors \mathbf{u} . Dann sind sie genau dann isotrop, wenn*

1. $e(\mathbf{u}) = f(|\mathbf{u}|^2)$,
2. $\mathbf{q}(\mathbf{u}) = h(|\mathbf{u}|^2)\mathbf{u}$,
3. $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = s_0(|\mathbf{u}|^2)\mathbf{I} + s_1(|\mathbf{u}|^2)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$,

wobei f , h , s_0 , s_1 beliebige skalare Funktionen sind.

BEWEIS: "⇐": Für einen orthogonalen Tensor $\mathbf{Q} \in O(3)$ berechnen wir

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{u}) = f(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = f(|\mathbf{u}|^2).$$

Dies ist die Behauptung im Falle einer skalaren Funktion. Für vektor- und tensorwertige Funktionen geht man analog vor.

"⇒": Ad 1. Da e isotrop ist, gilt für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{Q} \in O(3)$, dass $e(\mathbf{u}) = e(\mathbf{Q}\mathbf{u})$. Da $|\mathbf{Q}\mathbf{u}|^2 = \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$, haben \mathbf{u} und $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ dieselbe Länge. Umgekehrt können zwei beliebige Vektoren gleicher Länge durch Rotation ineinander überführt werden, d.h. für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ existiert $\mathbf{Q} \in O(3)$, sodass $\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{u}$ ist. Es folgt also $e(\mathbf{v}) = e(\mathbf{Q}\mathbf{u}) = e(\mathbf{u})$ und e hängt nur von der Länge $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ab. Das war zu zeigen.

Ad 2. Für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ und beliebiges $\mathbf{Q} \in O(3)$ gilt $\mathbf{q}(\mathbf{0}) = \mathbf{Q}\mathbf{q}(\mathbf{0})$. Daraus folgt $\mathbf{q}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, d.h. die Aussage stimmt für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Sei nun $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Indem wir $\mathbf{q}(\mathbf{u})$ in einen Anteil parallel und einen Anteil senkrecht zu \mathbf{u} zerlegen, können wir

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{u} + \beta(\mathbf{u})\mathbf{v}$$

mit $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ (d.h. \mathbf{v} ist orthogonal zu \mathbf{u}) schreiben. Da \mathbf{q} isotrop ist, gilt für beliebiges $\mathbf{Q} \in O(3)$, dass $\mathbf{q}(\mathbf{Q}\mathbf{u}) = \mathbf{Q}\mathbf{q}(\mathbf{u})$. Wir wählen für \mathbf{Q} die Rotation um 180° um den Vektor \mathbf{u} und erhalten $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\mathbf{Q}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$. Also muss $\beta(\mathbf{u}) = 0$ gelten. Wegen $\mathbf{Q}\alpha(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}(\mathbf{Q}\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{Q}\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{u}$ muss $\alpha(\mathbf{u})$ eine isotrope skalare Funktion sein. Mit 1 folgt $\alpha(\mathbf{u}) = h(|\mathbf{u}|^2)$ und damit die Behauptung.

Ad 3. Wir betrachten $\mathbf{g}(\mathbf{u}) := \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{u}$. Es gilt $\mathbf{g}(\mathbf{Q}\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{g}(\mathbf{u})$, der Vektor \mathbf{g} ist also isotrop. Mit Nr. 2 folgt $\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{u}$ mit einer skalaren Funktion α . Insbesondere ist \mathbf{u} ein Eigenvektor von $\mathbf{T}(\mathbf{u})$. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen existieren weitere Eigenvektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} , sodass $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 1$ und $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ eine orthogonale Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Außerdem gilt die Zerlegung

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \beta(\mathbf{u})\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \gamma(\mathbf{u})\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \quad (6.20)$$

und es gibt ein $\mathbf{Q} \in O(3)$, sodass

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{w} = \mathbf{v} \quad (6.21)$$

gilt. Mit (6.21), der Isotropie von \mathbf{T} , (6.20) und nochmals (6.21) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{u}) &= \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{u}) = \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{Q}^\top \\ &= \alpha(\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}\mathbf{Q}^\top + \beta(\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\mathbf{Q}^\top + \gamma(\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}\mathbf{Q}^\top \\ &= \alpha(\mathbf{u})\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \beta(\mathbf{u})\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} + \gamma(\mathbf{u})\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\beta(\mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{u}). \quad (6.22)$$

Indem wir die (symmetrische) Einheitsmatrix in Komponenten bzgl. der Basis $\{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}\}$ zerlegen und die Orthogonalität von $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ausnutzen, können wir schreiben

$$\frac{1}{\bar{s}_0(\mathbf{u})}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{I} - \tilde{\beta}(\mathbf{u})\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

Wir setzen dies und (6.22) in (6.20) ein und erhalten

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \bar{s}_0(\mathbf{u})\mathbf{I} + \bar{s}_1(\mathbf{u})\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$$

mit $\bar{s}_1(\mathbf{u}) := \alpha(\mathbf{u}) - \beta(\mathbf{u})\bar{s}_0(\mathbf{u})\tilde{\beta}(\mathbf{u})$. Wie in 2 folgert man aus der Isotropie von \mathbf{T} , dass \bar{s}_0 und \bar{s}_1 isotrope skalare Funktionen sind. Daraus folgt die Behauptung. \square

Analoge Resultate zu Satz 6.19 kann man auch für andere Situationen zeigen. Dabei wird viel lineare Algebra benutzt, die Beweise sind teilweise anspruchsvoll und technisch aufwendig und werden deshalb an dieser Stelle ausgelassen. Man erhält, dass isotrope Funktionen immer Linearkombinationen der Generatoren sind, wobei die Koeffizienten beliebige skalare Funktionen der skalaren Invarianten sind. Die folgende Tabelle listet sowohl die skalaren Invarianten, als auch die Generatoren in für uns relevanten Fällen auf.

Skalare Invarianten	
\mathbf{u}	$ \mathbf{u} ^2$
\mathbf{A}	$\text{tr } \mathbf{A}, \mathbf{A} : \mathbf{A}, \det \mathbf{A}$
\mathbf{u}, \mathbf{A}	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{u}, \mathbf{u} ^2, \text{tr } \mathbf{A}, \mathbf{A} : \mathbf{A}, \det \mathbf{A}$
Vektorielle Generatoren	
\mathbf{u}	\mathbf{u}
\mathbf{A}	$\mathbf{0}$
\mathbf{u}, \mathbf{A}	$\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}^2\mathbf{u}, \mathbf{u}$
Symmetrische tensorielle Generatoren	
\mathbf{u}	$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$
\mathbf{A}	$\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2$
\mathbf{u}, \mathbf{A}	$\mathbf{u} \otimes \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u} \otimes \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2$

Klassifikationssätze für isotrope Funktionen können helfen, die Materialgesetze zu vereinfachen. Das folgende Beispiel zeigt, wie man aus Satz 6.19 eine kompakte Formel für den Wärmefluss herleiten kann:

6.23 Beispiel. Für den Wärmefluss wissen wir $\mathbf{q} = \widehat{\mathbf{q}}(\rho, \theta, \nabla\theta, \mathbf{D})$. Aus obiger Tabelle folgt die Zerlegung

$$\mathbf{q} = \kappa_1 \nabla\theta + \kappa_2 \mathbf{D}\nabla\theta + \kappa_3 \mathbf{D}^2\nabla\theta,$$

dabei sind κ_i Funktionen, die von den skalaren Invarianten $\rho, \theta, |\nabla\theta|^2, \text{tr } \mathbf{D}, |\mathbf{D}|^2, \det \mathbf{D}, \nabla\theta \cdot (\mathbf{D}\nabla\theta), \nabla\theta \cdot (\mathbf{D}^2\nabla\theta)$ abhängen. Das ist viel zu kompliziert, um damit weiterzuarbeiten, deshalb kommt an dieser Stelle die Modellierung ins Spiel. Und zwar hängt der Wärmefluss \mathbf{q} kaum von der Scherung \mathbf{D} ab, wir können also

$$\mathbf{q} = \widehat{\mathbf{q}}(\rho, \theta, \nabla\theta)$$

annehmen. Wir erhalten

$$\mathbf{q} = \kappa \nabla\theta,$$

wobei der Wärmeleitkoeffizient κ von $\rho, \theta, |\nabla\theta|^2$ abhängt. Dies ist das Fouriersche Gesetz. Meistens gilt sogar $\kappa = \text{const}$, mindestens jedoch $\kappa = \kappa(\rho, \theta)$.

Experimentell gestaltet es sich leider schwierig, die Abhängigkeit von $|\nabla\theta|$ zu untersuchen.

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir Materialgesetze herleiten, die typisch für das Verhalten von Gasen und Flüssigkeiten sind.

Gase

Für ein *ideales Gas* wird der Spannungstensor in (6.16) eindeutig durch

$$p = R\rho\theta, \quad \mathbf{T}^D = \mathbf{0}$$

bestimmt. Diese Beschreibung geht zurück auf Charles und Boyle und ist für große Bereiche von θ, ρ aus der statistischen Mechanik für schwach interagierende Gase gut herleitbar. Hierbei ist R die *Gaskonstante*. Sie steht mit der universellen Gaskonstante $R_m \approx 8,3 \frac{J}{mol K}$ durch $R = \frac{R_m}{m}$ in Verbindung, wobei m die molare Masse, d.h. die Masse eines Mols ist.

Aufgrund der Definition des thermodynamischen Druckes (cf. (6.16)) erhalten wir für ideale Gase

$$\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = p = R\rho\theta.$$

Somit folgt dann

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{R\theta}{\rho}$$

und weiter mit Integration nach ρ

$$\begin{aligned} \psi &= R\theta \ln \rho + g(\theta) \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -R \ln \rho - g'(\theta) \\ e &= \psi + \theta\eta = R\theta \ln \rho + g(\theta) - \theta R \ln \rho - \theta g'(\theta) \\ &= g(\theta) - \theta g'(\theta), \end{aligned}$$

d.h.

$$e = e(\theta).$$

6.24 Definition. *Wir definieren die spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_V , und die spezifische Wärme bei konstantem Druck c_p , als*

$$c_V := -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad \text{und} \quad c_p := c_V + R.$$

Das Verhältnis der spezifischen Wärmekoeffizienten γ ist definiert durch

$$\gamma := \frac{c_p}{c_V} > 1.$$

Aufgrund obiger Rechnungen erhalten wir für die spezifische Wärme bei konstantem Volumen

$$c_V = -\theta g''(\theta).$$

Für konstantes c_V erhalten wir also

$$g''(\theta) = -\frac{c_V}{\theta},$$

und es folgt

$$\begin{aligned} g' &= -c_V \ln \theta - c_1, \\ g &= -c_V \theta (\ln \theta - 1) - c_1 \theta + c_2, \\ e &= -c_1 \theta + c_2 - c_V \theta (\ln \theta - 1) + \theta c_V \ln \theta + c_1 \theta \\ &= c_V \theta + c_2. \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta &= -R \ln \rho - g'(\theta) = -R \ln \rho + c_V \ln \theta + c_1 \\ &= c_V \ln \frac{\theta}{\rho^{\frac{R}{c_V}}} + c_1 \\ &= c_V \ln \frac{\theta}{\rho^{\gamma-1}} + c_1, \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $\frac{R}{c_V} = \frac{c_p - c_V}{c_V} = \gamma - 1$ ist. Mit $\rho \theta = p/R$ erhalten wir also für ein ideales Gas mit konstantem c_V :

$$\begin{aligned} \eta &= c_V \ln \frac{p}{R \rho^\gamma} + c_1, \\ e &= c_V \theta + c_2, \\ p &= R \rho^\gamma \exp\left(\frac{\eta - c_1}{c_V}\right). \end{aligned}$$

Bei der Untersuchung von Strömungen von Gasen spielen oft folgende spezielle Prozesse eine Rolle:

- isothermaler Prozess: $\theta = \text{const.}$

$$p = R \theta_0 \rho = k \rho.$$

- adiabatische Prozesse: kein Wärmeaustausch mit der Umgebung

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad r = 0.$$

6.25 Lemma. *In einem adiabatischen Prozess eines idealen Gases mit $c_V = \text{const.}$ ist die Entropie konstant auf Trajektorien. Eine Trajektorie ist der Pfad eines Materialpunktes \mathbf{X}_0 unter dem Prozess, d.h. die Menge $\{\chi(t, \mathbf{X}_0) \mid t \in [0, T]\}$.*

BEWEIS: Mit obigen Rechnungen schreiben wir

$$\begin{aligned} \rho \dot{\eta} &= \rho \left(c_V \ln \frac{\theta}{\rho^{\gamma-1}} + c_1 \right) \\ &= \rho c_V \frac{\rho^{\gamma-1}}{\theta} \left(\dot{\theta} \rho^{1-\gamma} + \theta(1-\gamma) \rho^{-\gamma} \dot{\rho} \right) \\ &= c_V \frac{\rho}{\theta} \dot{\theta} - c_V (\gamma-1) \dot{\rho} \\ &= c_V \frac{\rho}{\theta} \dot{\theta} + R \rho \operatorname{tr} \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{\theta} (c_V \rho \dot{\theta} + p \operatorname{tr} \mathbf{D}), \end{aligned}$$

und es folgt, dass

$$\dot{\eta} = \frac{1}{\rho \theta} (c_V \rho \dot{\theta} + p \operatorname{tr} \mathbf{D}).$$

Andererseits gilt die Energiebilanz

$$\rho \dot{e} - \operatorname{div} \mathbf{q} = \rho r + \mathbf{T} : \mathbf{D}.$$

Nun ist aber für adiabatische Prozesse $r = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ und für ideale Gase gilt $\mathbf{T} : \mathbf{D} = -p \operatorname{tr} \mathbf{D}$ sowie $\dot{e} = c_V \dot{\theta}$, also ist

$$c_V \rho \dot{\theta} + p \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0,$$

woraus $\dot{\eta} = 0$ folgt, also ist η konstant auf Trajektorien. \square

Für homogene ideale Gase in adiabatischen Prozessen ist also die Entropie konstant und wir erhalten für den Druck:

$$p = R \exp \left(\frac{\eta_0 - c_1}{c_V} \right) \rho^\gamma =: k \rho^\gamma.$$

Allgemein heißen Materialien *barotrop*, wenn für den thermodynamischen Druck gilt

$$p = p(\rho).$$

Für $c_V = \text{const.}$ ergibt sich analog zu obiger Rechnung für g , wobei man noch benutzen muss, dass das Gas barotrop ist und die Integrationskonstanten geeignet wählt, dass

$$\begin{aligned} \psi &= -c_V \theta \ln \theta + b(\rho), \\ e &= c_V \theta + b(\rho), \\ \eta &= c_V \ln \theta + c_V, \end{aligned}$$

wobei

$$b(\rho) = \int_1^\rho \frac{p(z)}{z^2} dz.$$

Flüssigkeiten

Wir wissen bereits aus Abschnitt 3.6 (cf. (6.16)), dass der Spannungstensor durch

$$\mathbf{T} = -p(\rho, \theta)\mathbf{I} + \mathbf{T}^D(\theta, \rho, \nabla\theta, \mathbf{D})$$

dargestellt werden kann, wobei $p(\rho, \theta) = \rho^2 \partial_\rho \psi(\rho, \theta)$ der thermodynamische Druck ist. Um den Spannungstensor \mathbf{T} zu bestimmen, und damit die Grundgleichungen lösen zu können, müssen wir also Formeln/ Zusammenhänge für p und \mathbf{T}^D entwickeln. Zuerst befassen wir uns mit dem thermodynamischen Druck p . Mittels Taylorentwicklung erhalten wir

$$p(\rho, \theta) = p(\rho, \theta_0) + (\theta - \theta_0)\partial_\theta p(\rho, \theta_0) + \dots$$

für gegebenes $\theta_0 > 0$. Man kann oft annehmen, dass die ersten beiden Glieder der Entwicklung reichen (dies stellt auf jeden Fall eine gute Näherung dar), was wir nun auch tun werden. Somit nehmen wir an, dass gilt:

$$p(\rho, \theta) = p_e(\rho) + \theta p_\theta(\rho) \tag{6.26}$$

mit

$$\begin{aligned} p_e(\rho) &= p(\rho, \theta_0) - \theta_0 \partial_\theta p(\rho, \theta_0), \\ p_\theta(\rho) &= \partial_\theta p(\rho, \theta_0). \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Annahme wollen wir daraus nun e und ψ berechnen. Die Definition des thermodynamischen Druckes liefert

$$\partial_\rho \psi(\rho, \theta) = \frac{p(\rho, \theta)}{\rho^2},$$

was zusammen mit unserer Annahme und Integration bzgl. ρ liefert

$$\psi(\rho, \theta) = p_0(\rho) + \theta p_1(\rho) + g(\theta) \tag{6.27}$$

mit

$$\begin{aligned} p_0(\rho) &= \int_1^\rho \frac{p_e(z)}{z^2} dz, \\ p_1(\rho) &= \int_1^\rho \frac{p_\theta(z)}{z^2} dz. \end{aligned}$$

Aus (6.27) folgt

$$\begin{aligned}\partial_\theta\psi &= g'(\theta) + p_1(\rho), \\ \partial_\theta^2\psi &= g''(\theta).\end{aligned}$$

Mithilfe der Definition der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen $c_V = -\theta\partial_\theta^2\psi(\rho, \theta)$ und der Annahme, dass $c_V = \text{const.}$ gilt, erhalten wir, analog zu den Berechnungen im Falle von Gasen,

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= -c_V \ln \theta - c_1, \\ g(\theta) &= -c_V\theta(\ln \theta - 1) - c_1\theta + c_2.\end{aligned}$$

Mit (6.27) folgt

$$\psi(\rho, \theta) = p_0(\rho) + \theta p_1(\rho) - c_V\theta(\ln \theta - 1) - c_1\theta + c_2.$$

Indem wir die Zusammenhänge $e = \psi + \theta\eta$ und $\eta = -\partial_\theta\psi$ benutzen, folgt daraus

$$\begin{aligned}e(\rho, \theta) &= c_V\theta + c_2 + p_0(\rho), \\ \eta(\rho, \theta) &= -p_1(\rho) + c_V \ln \theta + c_1.\end{aligned}\tag{6.28}$$

Aufgrund dieser Rechnungen können wir nun die einzelnen Terme in der Energiebilanz $\rho\dot{e} - \text{div } \mathbf{q} = \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r$ berechnen. Wir haben

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \partial_\rho e \dot{\rho} + \partial_\theta e \dot{\theta} = \frac{p_e(\rho)}{\rho^2} \dot{\rho} + c_V \dot{\theta} = -\frac{p_e(\rho)}{\rho} \text{tr } \mathbf{D} + c_V \dot{\theta}, \\ \mathbf{T} : \mathbf{D} &= -p_e(\rho) \text{tr } \mathbf{D} - \theta p_\theta(\rho) \text{tr } \mathbf{D} + \mathbf{T}^D : \mathbf{D}.\end{aligned}$$

Wenn wir nun noch annehmen, dass $\mathbf{q} = \kappa(\rho, \theta)\nabla\theta$ gilt (vgl. Beispiel 6.23), hat die Energiebilanz die Form

$$c_V \rho \dot{\theta} - \text{div}(\kappa \nabla \theta) = -\theta p_\theta(\rho) \text{tr } \mathbf{D} + \mathbf{T}^D : \mathbf{D} + \rho r.\tag{6.29}$$

Dies ist die *Wärmeleitungsgleichung für kompressible viskose Flüssigkeiten mit konstanter spezifischer Wärme c_V* .

Nun betrachten wir den nicht-Gleichgewichtsanteil des Spannungstensors \mathbf{T}^D , der eine Funktion von $\rho, \theta, \nabla\theta, \mathbf{D}$ ist. Wir könnten nun einen allgemeinen Repräsentationssatz, also eine Verallgemeinerung von Satz 6.19 anwenden. Allerdings gestaltet es sich schwierig, experimentell die Abhängigkeit von $\nabla\theta$ zu bestimmen. Deshalb nehmen wir

$$\mathbf{T}^D = \widehat{\mathbf{T}}^D(\rho, \theta, \mathbf{D})$$

an. Die Theorie isotroper Funktionen aus Abschnitt 3.6 sagt uns nun, dass

$$\widehat{\mathbf{T}}^D(\rho, \theta, \mathbf{D}) = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2 \quad (6.30)$$

gelten muss, wobei α, β, γ skalare Funktionen der Invarianten $\rho, \theta, \operatorname{tr} \mathbf{D}, |\mathbf{D}|^2$ und $\det \mathbf{D}$ sind. Flüssigkeiten, für die \mathbf{T}^D in der Form (6.30) dargestellt werden kann, heißen *Reiner-Rivlin-Fluide*.

Wir diskutieren nun die Konsequenzen der Dissipationsungleichung (6.15) für *Navier-Stokes-Fourier-Fluide*. Navier-Stokes-Fourier-Fluide sind ein Spezialfall der Reiner-Rivlin-Fluide, für die die Materialgesetze linear in $\nabla\theta$ und \mathbf{D} sind. Daraus folgt

$$\widehat{\mathbf{T}}^D(\rho, \theta, \mathbf{D}) = \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{D})\mathbf{I} + \mu \mathbf{D},$$

wobei die Viskositäten λ und μ Funktionen von ρ, θ sind, denn alle anderen Invarianten fallen wegen der Linearität weg. Für den nicht-Gleichgewichtsanteil des Wärmeflusses \mathbf{q}^D nehmen wir die Gültigkeit des Fourierschen Gesetzes an (vgl. Beispiel 6.23) und erhalten

$$\mathbf{q}^D(\rho, \theta, \nabla\theta) = \kappa \nabla\theta,$$

wobei der Wärmeleitkoeffizient κ wieder eine Funktion von ρ, θ ist. Wenn wir dies in die residuale Dissipationsungleichung (6.15) einsetzen, erhalten wir

$$\lambda |\operatorname{tr} \mathbf{D}|^2 + \mu |\mathbf{D}|^2 + \kappa \frac{|\nabla\theta|^2}{\theta} \geq 0.$$

Wir fixieren ρ, θ beliebig aber fest, wobei $\theta > 0$ gelten soll.

1. Für einen Prozess mit $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ folgt $\kappa \frac{|\nabla\theta|^2}{\theta} \geq 0$ und damit $\kappa \geq 0$.
2. Für einen Prozess mit $\nabla\theta = \mathbf{0}$ folgt $\lambda |\operatorname{tr} \mathbf{D}|^2 + \mu |\mathbf{D}|^2 \geq 0$. Indem wir den Fall $\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$ betrachten, erhalten wir zudem $\mu \geq 0$. Mit Lemma 6.32, dass wir später beweisen werden, gilt $|\operatorname{tr} \mathbf{D}|^2 \leq 3 |\mathbf{D}|^2$ für alle symmetrischen Tensoren. Wenn wir dies in unserer Ungleichung anwenden, erhalten wir $3\lambda + \mu \geq 0$, also $\lambda \geq -\frac{\mu}{3}$.

Insgesamt erhalten wir, dass für ein Navier-Stokes-Fourier-Fluid gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\rho, \theta, \mathbf{D}) &= -p(\rho, \theta)\mathbf{I} + \lambda(\rho, \theta)(\operatorname{tr} \mathbf{D})\mathbf{I} + \mu(\rho, \theta)\mathbf{D}, \\ \mathbf{q}(\rho, \theta, \nabla\theta) &= \kappa(\rho, \theta)\nabla\theta, \end{aligned}$$

wobei

$$\kappa(\rho, \theta) \geq 0, \quad \mu(\rho, \theta) \geq 0, \quad \lambda(\rho, \theta) \geq -\frac{\mu(\rho, \theta)}{3}$$

gilt. Hier haben wir auch (6.14) benutzt. Meistens wird $\lambda, \mu, \kappa = \text{const.}$ angenommen.

Das volle Gleichungssystem für kompressible Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeiten mit konstanten Koeffizienten lautet damit

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \operatorname{div} \mathbf{D} - \nabla p &= \rho \mathbf{b}, \\ c_V \rho \dot{\theta} - \kappa \Delta \theta &= -\rho \theta p_\theta \operatorname{tr} \mathbf{D} + \lambda |\operatorname{tr} \mathbf{D}|^2 + \mu |\mathbf{D}|^2 + \rho r, \end{aligned} \quad (6.31)$$

wobei $p = p(\rho, \theta) = p_e(\rho) + \theta p_\theta(\rho)$, $\kappa, \mu \geq 0$, $\lambda \geq -\frac{\mu}{3}$, $c_V = \text{const.}$ gilt.

Wir tragen das fehlende Lemma nach:

6.32 Lemma. *Für alle symmetrischen Tensoren \mathbf{D} gilt $|\operatorname{tr} \mathbf{D}|^2 \leq 3 |\mathbf{D}|^2$.*

BEWEIS: Da die Matrix \mathbf{D} symmetrisch ist, ist sie orthogonal diagonalisierbar. Spur und Betrag sind unabhängig unter orthogonaler Transformation, also können wir ohne Einschränkung $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$ annehmen, also dass \mathbf{D} bereits Diagonalgestalt hat.

Wir kürzen ab $\mathbf{d} := (d_1, d_2, d_3)^\top$, $f(\mathbf{d}) := (d_1 + d_2 + d_3)^2$ und $h(\mathbf{d}) := |\mathbf{d}|^2 - 1$. Wir suchen das Maximum der linken Seite $f(\mathbf{d}) = (d_1 + d_2 + d_3)^2$ unter der Nebenbedingung $h(\mathbf{d}) = |\mathbf{D}|^2 - 1 = 0$. Dabei gilt $\nabla f(\mathbf{d}) = 2(d_1 + d_2 + d_3)(1, 1, 1)^\top$ und $\nabla h(\mathbf{d}) = 2\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. Mit der Euler-Lagrange-Theorie existiert ein Lagrangemultiplikator λ , sodass $\nabla f = \lambda \nabla h$ gilt. Es folgt $d_1 + d_2 + d_3 = \lambda d_i$ für $i = 1, 2, 3$ und damit $d_1 = d_2 = d_3$. Mit $h(\mathbf{d}) = 0$ folgt weiter $d_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$ für $i = 1, 2, 3$ und durch Einsetzen in die Gleichung $d_1 + d_2 + d_3 = \lambda d_i$ folgt $\lambda = 3$. Das Maximum ist also 3 und wird bei $\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I}$ angenommen. \square

Inkompressibilität

Die Beobachtung, dass eine Bewegung das Volumen des Materials nicht verändert, führt zum Konzept der Inkompressibilität. Dafür erscheinen zwei verschiedene Sichtweisen als sinnvoll:

Einerseits kann man eine Strömung eines Fluids als inkompressibel ansehen, d.h. Inkompressibilität ist eine Eigenschaft der Strömung. Was heißt das? Wir haben in (3.1) gesehen, dass relative Veränderungen der Dichte gegeben sind durch

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\beta \dot{p} + \alpha \dot{\theta},$$

mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α und dem isothermalen Kompressibilitätskoeffizienten β . Volumen und Dichte ändern sich also nicht bzw. deren Änderungen sind vernachlässigbar, wenn α, β sehr klein oder gleich Null

sind. Man kann für Klassen von Bewegungen Bedingungen angeben, die dies garantieren. Dies geschieht mithilfe der Entdimensionalisierung, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen.

Andererseits kann man das Material als inkompressibel ansehen. Das heißt dann, es kann nur isochore, d.h. nicht das Volumen verändernde, Bewegungen ausführen. Dies ergibt eine Neben- oder Zwangsbedingung für die Bewegung. Man kann sich dies ähnlich wie bei einem Ball, der auf einer schiefen Ebene rollt vorstellen. Damit das Material die Zwangsbedingung in einer Bewegung erfüllen kann, sind zusätzliche Zwangsspannungen nötig, die keine Arbeit verrichten und unabhängig von der Bewegung sind.

Wir führen dies genauer für eine Zwangsbedingung der Form

$$\lambda(\mathbf{F}) = 0$$

aus, wobei \mathbf{F} der Deformationsgradient ist. Die zu bestimmende Zwangsspannung \mathbf{N} , die ein symmetrischer Tensor ist, soll keine Arbeit verrichten, d.h. es muss $\mathbf{N} : \mathbf{L} = 0$ gelten (vgl. Abschnitt 3.5). Wie oben bereits angedeutet, ist $\lambda(\mathbf{F})$ eine Materialeigenschaft, also objektiv.

6.33 Lemma. *Sei $\lambda(\mathbf{F})$ eine objektive skalare Funktion. Dann gilt*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^\top = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^\top \right)^\top = \mathbf{F} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}} \right)^\top.$$

BEWEIS: Da λ objektiv ist, gilt $\lambda(\mathbf{F}) = \lambda(\mathbf{Q}\mathbf{F})$ für orthogonale Tensoren \mathbf{Q} . Gleiches gilt auch für die materielle Zeitableitung und wir erhalten

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) : (\mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}).$$

Wir wählen \mathbf{Q} nun so, dass zum Zeitpunkt t_0 gilt

$$\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(t_0) = \mathbf{W}$$

für einen beliebigen antisymmetrischen Tensor \mathbf{W} . Es folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : (\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{W}\mathbf{F}),$$

und damit

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : \mathbf{W}\mathbf{F} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^\top : \mathbf{W},$$

das heißt, der Tensor $\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^\top$ ist symmetrisch. □

6.34 Lemma. *Seien $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ zwei nichttriviale, symmetrische Tensoren, so dass*

$$\mathbf{T}_2 : \mathbf{A} = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{A} \text{ mit } \mathbf{T}_1 : \mathbf{A} = 0$$

gilt. Dann ist

$$\mathbf{T}_2 = \alpha \mathbf{T}_1,$$

wobei α ein Skalar ist.

BEWEIS: Da \mathbf{T}_1 nichttrivial ist, dürfen wir $\alpha := \frac{\mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_2}{\mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_1}$ und $\mathbf{U} := \mathbf{T}_2 - \alpha \mathbf{T}_1$ setzen. Es folgt

$$\mathbf{T}_2 = \alpha \mathbf{T}_1 + \mathbf{U} \quad (6.35)$$

und, indem wir das Matrix-Skalarprodukt beider Seiten mit \mathbf{T}_1 nehmen und die Definition von α einsetzen,

$$\mathbf{T}_1 : \mathbf{U} = \mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_2 - \alpha \mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_1 = 0. \quad (6.36)$$

Per Voraussetzung folgt aus (6.36) schon $\mathbf{T}_2 : \mathbf{U} = 0$. Indem wir dies in $\mathbf{T}_2 : \mathbf{U} = \alpha \mathbf{T}_1 : \mathbf{U} + \mathbf{U} : \mathbf{U}$ einsetzen und (6.36) benutzen, folgt $\mathbf{U} : \mathbf{U} = 0$, also $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{T}_2 = \alpha \mathbf{T}_1$. \square

6.37 Satz. *Sei λ eine objektive skalare Funktion. Wenn der zugehörige symmetrische Zwangsspannungstensor \mathbf{N} keine Arbeit verrichtet, dann gilt*

$$\mathbf{N} = \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^\top, \quad (6.38)$$

wobei α eine beliebige Funktion von (t, \mathbf{x}) ist.

BEWEIS: Aus der Zwangsbedingung $\lambda(\mathbf{F}) = 0$ folgt durch Betrachtung der materiellen Zeitableitung, (2.12) aus Kapitel 2 und der Symmetrieeigenschaft Lemma 6.33

$$0 = \dot{\lambda}(\mathbf{F}) = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) : \mathbf{L}\mathbf{F} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^\top : \mathbf{L} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^\top : \mathbf{D}.$$

Da \mathbf{N} symmetrisch ist, folgt $\mathbf{N} : \mathbf{D} = \mathbf{N} : \mathbf{L}$. Da der Zwangsspannungstensor \mathbf{N} keine Arbeit verrichtet, gilt $0 = \mathbf{N} : \mathbf{L} = \mathbf{N} : \mathbf{D}$ für alle Bewegungen, die der Zwangsbedingung $\lambda(\mathbf{F}) = 0$ genügen, d.h. für alle \mathbf{D} die obiger Identität genügen. Mit Lemma 6.34 folgt nun (6.38). \square

Wir möchten Satz 6.37 nun auf das Konzept Inkompressibilität anwenden. Inkompressibilität bedeutet, dass das Volumen konstant bleibt, wir betrachten also

$$\lambda(\mathbf{F}) := \det \mathbf{F} - 1 = 0.$$

Aus Kapitel 2 wissen wir $\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-\top}$. Daraus folgt nun

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^\top = \det \mathbf{F} \mathbf{I} = \mathbf{I},$$

mit Satz 6.37 also

$$\mathbf{N} = -\alpha \mathbf{I},$$

wobei α eine skalare Funktion ist. Für inkompressible Navier-Stokes-Flüssigkeiten gilt deshalb

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}^E + \mathbf{T}^D + \mathbf{N} \\ &= -p(\rho, \theta) \mathbf{I} + \lambda(\rho, \theta) (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} + \mu(\rho, \theta) \mathbf{D} - \alpha \mathbf{I} \\ &=: -p \mathbf{I} + \mu(\rho, \theta) \mathbf{D} \end{aligned}$$

Die neue Variable $p = p(\rho, \theta) - \lambda(\rho, \theta) (\text{tr } \mathbf{D}) + \alpha$ ist der *Druck*, der keine Zustandsgröße (Materialeigenschaft) ist, da die Funktion α nicht bestimmt ist. In der Tat muss der Druck p aus den Bewegungsgleichungen bestimmt werden.

Aus der Bedingung $\det \mathbf{F} = 1$ folgt mit der Massenerhaltung in Lagrangebeschreibung $\rho(t, \mathbf{X}) = \rho(0, \mathbf{X})$, also $\dot{\rho} = 0$. Es folgt $\rho \text{div } \mathbf{v} = 0$, d.h. $\text{tr } \mathbf{D} = 0$.

Insgesamt erhalten wir das Gleichungssystem für inkompressible Navier-Stokes-Flüssigkeiten mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} - \mu \text{div } \mathbf{D} + \nabla p &= \rho \mathbf{b}, \\ c_V \rho \dot{\theta} - \kappa \Delta \theta &= \mu |\mathbf{D}|^2 + \rho r, \end{aligned}$$

wobei $\mu, \kappa \geq 0$, $c_V = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$ und p der Druck ist.

Für verallgemeinerte Newtonsche Fluide starten wir wieder den Ansatz

$$\mathbf{T}^D = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2,$$

wobei α, β, γ Funktionen der skalaren Invarianten sind. Wir nehmen an, dass $\gamma = 0$ gilt und setzen auch, wegen Inkompressibilität, $\alpha = 0$. Es bleibt $\beta = \beta(\rho, \theta, |\mathbf{D}|^2, \det \mathbf{D})$ zu bestimmen. Wir vernachlässigen die Abhängigkeit von $\det \mathbf{D}$ und nehmen an

$$\mathbf{T}^D(\mathbf{D}) = \mu_0 (\delta + |\mathbf{D}|)^{q-2} \mathbf{D} \quad (6.39)$$

mit $\mu_0 = \mu_0(\rho, \theta)$ oder $\mu_0 = \text{const.}$ und $\delta \geq 0$. Dies ist motiviert durch die Beobachtung, dass die Viskosität μ nicht konstant sein muss, sondern von der Scherrate abhängen kann. Deshalb wird in diesem Zusammenhang auch von Flüssigkeiten mit scherabhängiger Viskosität gesprochen.

Verschiedene Werte des Scherexponenten q implizieren unterschiedliche strukturelle Eigenschaften der zugehörigen Fluide:

- $q = 2$ bedeutet konstante Viskosität, wir erhalten Newtonsche Fluide (z.B. Wasser).
- $q > 2$: die Viskosität steigt mit zunehmenden Scherkräften. Dieser Fall tritt eher selten auf, man spricht von scherverdickenden (dilatanten) Flüssigkeiten.
- $1 < q < 2$: diese pseudoplastischen Flüssigkeiten kommen häufiger vor (z.B. Polymere, Eis, Blut, Suspensionen...). Bspw. ist unbewegtes Blut eher zäh (was die Gerinnung unterstützt), bei hohen Scherkräften verformen sich die roten Blutkörperchen jedoch so, dass das Blut besser durch die Adern fließen kann. Die Viskosität sinkt also bei zunehmenden Scherkräften. Wegen diesem Effekt nennt man diese Klasse von Flüssigkeiten auch "scherverdünnend".