Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 3. Mai 2024

Numerik II

SoSe 2024 — Blatt 2

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss24/num/index.html

Abgabe: 16.5.2024, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Die Lebesgue-Konstante) (1+2+2 Punkte)

Für Stützstellen $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ definiert man den Interpolationsoperator $\mathcal{I}_n \colon C([a,b]) \to \mathcal{P}_n$, als die Lösung der Interpolationsaufgabe, d.h. $\mathcal{I}_n[f] \in \mathcal{P}_n$ erfüllt $\mathcal{I}_n[f](x_j) = f(x_j)$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$. Zeigen Sie:

(a) Der Interpolationsoperator ist ein linearer Projektor, d.h.:

$$\mathcal{I}_n[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{I}_n[f] + \beta \mathcal{I}_n[g] \qquad \forall\, f, g \in C([a,b]), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
$$\mathcal{I}_n[p] = p \qquad \forall\, p \in \mathcal{P}_n.$$

(b) Die Lebesgue-Konstante bezüglich der Knoten $\{x_j\}_{j=0}^n$ ist definiert, als die Operatornorm von I_n:

$$\Lambda_n := \sup_{f \in C([a,b])} \frac{\|\mathcal{I}_n[f]\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \sup_{\substack{f \in C([a,b]) \\ \|f\|_\infty = 1}} \|\mathcal{I}_n[f]\|_\infty .$$

Zeigen Sie, dass

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|,$$

wobei $\{L_i\}_{i=0}^n$ die Lagrange-Polynome bezeichnen.
Tipp: Begründen Sie die Existenz eines ζ, sodass $\sum_j |L_j(\zeta)| = \sup_x \sum_j |L_j(x)|$. Konstruieren Sie sich damit eine Funktion $\hat{f}$ um die geforderte Gleichheit zu zeigen.

(c) Zeigen Sie, dass Λ_n die (absolute) Konditionszahl bezüglich die Stützwerte ist. D.h. für $f \in C([a,b])$ und eine gestörte Funktion $\tilde{f} \in C([a,b])$, die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\left\| I_n[f] - I_n[\tilde{f}] \right\|_\infty \leq \Lambda_n \left\| f - \tilde{f} \right\|_\infty .$$

(d) [Bonus +2 Punkte] Man kann zeigen, dass es ein eindeutiges $p_n^\star \in \mathcal{P}_n$ gibt, mit der Eigenschaft $\|f - p_n^*\|_\infty = \inf_{q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - q_n\|_\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\|f - \mathcal{I}_n[f]\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \|f - p_n^*\|_\infty$$

D.h. für kleines Λ_n ist die Interpolante $\mathcal{I}_n[f]$ fast so gut wie die beste Approximation (bezüglich der Supremumnorm).

Bemerkung. Für äquidistante Stützstellen ist $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot \log n}$ (für $n \to \infty$) - also Störungen können exponentiell wachsen! Für Tschebyscheff-Knoten hingegen gilt $\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \log n$ (für $n \to \infty$) und $\Lambda_n \leq 4$ für $n \leq 100$ (viel besser!).

Aufgabe 2 (Tschebyscheff-Polynome) (1+2+2 Punkte)
Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1, 1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Funktionen:

(a) Es gilt $|T_n(t)| \leq 1$ für alle $t \in [-1, 1]$.

(b) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$ und für $n \geq 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}|_{[-1,1]}$.

(c) Für $n \geq 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j + 1/2)\pi/n)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, und die $n+1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n)$, $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 3 (Hermite-Interpolation) (4 Punkte)
Es seien $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ gegebene Stützstellen und sei $f \in C^1([a, b])$. Definiere für $k \in \{0, \ldots, n\}$ die Polynome:

$$F_{0,k}(x) = (L_k(x))^2(1 - 2L_k'(x_k)(x - x_k)), \qquad F_{1,k}(x) = (L_k(x))^2(x - x_k),$$

wobei $\{L_k\}_{k=0}^n$ die Lagrange-Polynome bezeichnen. Sei nun

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} [F_{0,k}(x)f(x_k) + F_{1,k}(x)f'(x_k)]$$

Beweisen Sie, dass

$$F_{0,k}(x_i) = \delta_{ik}, \qquad F_{0,k}'(x_i) = 0 \qquad F_{1,k}(x_i) = 0 \qquad F_{1,k}'(x_i) = \delta_{ik}.$$

Folgern Sie daraus, dass $f(x_i) = p(x_i)$ und $f'(x_i) = p'(x_i)$ für alle $i \in \{0, \ldots n\}$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass p das einzige Polynome in $\mathcal{P}_{2n+1}$ ist, das diese Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch sind, und begründen Sie ihre Antwort.

(a) Polynominterpolation ist gefährlich und kann immer zu Instabilitäten und Konvergenzproblemen führen.

(b) Die Lagrange Basis $\{L_j\}_{j=0}^n$ sollte in der Praxis nicht verwendet werden.

Tipp. Die Artikel "Six Myths of Polynomial Interpolation and Quadrature" und "Barycentric Lagrange Interpolation" (zu finden auf der Vorlesungswebsite) enthalten viele nützliche Informationen zu diesem Thema.