Numerik II

SoSe 2024 — Blatt 3

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss24/num/index.html

Abgabe: 3.6.2024, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Seien $0 \leq a < b$ und $x \mapsto g(x)$ die lineare Funktion, die die Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ an den Stützstellen a und b interpoliert. Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$e = \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$$

die Abschätzungen $e \leq (b-a)^2 a^{-3/2}/8$ im Fall $a > 0$ und $e \leq b^{1/2}/4$ im Fall $a = 0$ gelten.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = i/n$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ im Interval $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4n^{1/2}}$$

gilt. In welchen Bereichen ist die Fehlerabschätzung suboptimal?

(c) [Bonus +2 Punkte] Zeigen Sie, dass für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, definierte Partitionierung, die folgende verbesserte Fehlerabschätzung gilt:

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq cn^{-2},$$

mit einer von n unabhängigen Konstante $c > 0$. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4, 8$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{T}_n$ eine Partitionierung des Intervals $[a, b]$ und es seien $s \in \mathcal{S}^{1,0}$ und $g \in C^1([a, b])$, sodass $s(x_i) = g(x_i)$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s'|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |g'|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Dies zeigt, dass lineare Spline-Funktionen sind die interpolierende Funktionen mit der geringsten potentiellen Energie $\int_a^b |u'|^2$.