Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 31. Mai 2024

Numerik II

SoSe 2024 — Blatt 4

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss24/num/index.html

Abgabe: 13.6.2024, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ilk2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } l, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(b) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $\{\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}\}$ mit $\omega^k = (\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \dots, \omega_n^{(n-1)k}) \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, und der n-ten komplexen Einheitswurzel $\omega_n = e^{i2\pi/n}$ die Eigenschaft

$$\omega^k \cdot \omega^l = n\delta_{kl}$$

besitzt. (Hier bezeichnet $\cdot$ den Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$).

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass auf dem Raum der stetigen, komplexwertigen Functionen $C^0([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch $\varphi_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [0, 2\pi]$, ein Orthogonalsystem definieren, das heißt es gilt $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = 0$, falls $k \neq l$.

(c) Zeigen Sie, dass die Orthogonalität des Systems $\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ erhalten bleibt, wenn das Integral durch eine Riemannsche Summe approximiert wird, das heißt bezüglich

$$\langle f, g \rangle_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\overline{g(x_j)}$$

mit $x_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

(d) Sei $f \in \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^{n-1}$ eine Funktion der Form:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \qquad c_k \in \mathbb{C}, \quad \forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Zeigen Sie, dass $c_k = \frac{1}{2\pi}\langle f, \varphi_k \rangle_n$. Gibt es eine Verbindung mit der (nicht-diskreten) Fourier-Transformation?

(e) [**Bonus +2 Punkte**] Angenommen, dass die Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ einer Funktion $f \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ gleichmäßig konvergiert, zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion von f auf $\operatorname{span}\{\phi_k\}_{k=0}^{n-1}$ gegeben ist, durch

$$\Pi_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\langle f, \varphi_k \rangle_n.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung der reellen trigonometrischen Interpolationsaufgabe durch die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos(kx_j), \qquad b_\ell = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin(\ell x_j)$$

für $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ und $\ell \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ mit $x_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, und $n = 2m$ gegeben ist.

(b) Folgern Sie, dass die Vektoren

$$f^k = (\cos(kx_j))_{j=0,\dots,n-1} \qquad g^\ell = (\sin(\ell x_j))_{j=0,\dots,n-1}$$

für $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ und $\ell \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$ definieren.

Tipp. Gibt es eine Verbindung zwischen der Lösung der reellen trigonometrischen Interpolationsaufgabe (a_k, b_ℓ) und der Lösung der komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe β_k?