Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 14. Juni 2024

# Numerik II

SoSe 2024 — Blatt 5

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss24/num/index.html`

**Abgabe:** 27.6.2024, 16:00 Uhr.

**Aufgabe 1 (Die periodische Trapezregel)** (2+1+2 Punkte)

(a) Sei $f \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ sodass $f(0) = f(2\pi)$, und sei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi$ die uniforme Partitionierung des Intervals mit $(n+1)$ Knoten $x_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ gerade ist. Schreiben Sie die summierte Trapezregel zur Approximation des Integrals $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ und bestimmen Sie die Konvergenzordnung.

(b) Stellen Sie die Quadraturformel aus Teil (a) in einen Zusammenhang mit der Diskreten Fourier-Transformation.

(c) In der Praxis konvergiert die Quadraturformel aus Teil (a) deutlich schneller, wie Teil (a) zeigt. Begründen Sie dies, indem Sie die Formel mittels trigonometrischer Interpolation herleiten.

(d) **[Bonus +1 Punkt]** Welche Konvergenzrate würden Sie erwarten, angenommen, dass $f$ analytisch in einer Umgebung von $[0, 2\pi]$ ist?

**Aufgabe 2 (Clenshaw–Curtis Quadratur)** (3+2+2 Punkte)

(a) Sei $f \in C([-1, 1]; \mathbb{R})$ und seien $t_j = \cos(\frac{\pi j}{m})$, $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, die Extremstellen des Tschebyscheff Polynoms $T_m(t)$. Mithilfe der Diskreten Fourier Transformation, finden sie das interpolierende Polynom von $f$ in der Tschebyscheff-Basis. D.h. bestimmen Sie Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{0, \ldots, m\}$, sodass für

$$p_m(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k T_k(t),$$

die Identität $p_m(t_j) = f(t_j)$ für alle $j \in \{0, \ldots, m\}$ gilt.

**Tipp.** Blatt 4 Aufgabe 3.

(b) Die Clenshaw–Curtis Quadratur zur Approximation des Integrals $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ wird durch das Integral des interpolierenden Tschebyscheff-Polynoms definert:

$$Q(f) := \int_{-1}^{1} p_m(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass

$$Q(f) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{m} \frac{2c_k}{1 - k^2}$$

(c) Bestimmen Sie Quadratur-Gewichten $\omega_j$, $j \in \{0, \ldots, m\}$, sodass $Q(f) = \sum_{j=0}^{m} \omega_j f(t_j)$.

**Aufgabe 3** (2+2 Punkte)

Sei $Q\colon C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n+1$ Gewichten und Quadraturpunkten $\{(x_i, \omega_i)\}_{i=0}^n$, die exakt vom Grad $n$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\omega_i = \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

für $i \in \{0, \dots, n\}$ mit den durch die Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ definierten Lagrange-Basispolynomen $\{L_i\}_{i=0}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $\omega_i > 0$ für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

**Tipp.** Finden Sie ein Polynom $q_j \in \mathcal{P}_{2n}$, sodass $q_j(x_i) = \delta_{ij}$.