Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 28. Juni 2024

Numerik II

SoSe 2024 — Blatt 6

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss24/num/index.html`

Abgabe: 11.7.2024, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie ein Polynom in der Tschebyscheff-Basis:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \qquad c_n \neq 0.$$

Es seien die Nullstellen $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ von p paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass $x^\star \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, genau dann wenn $x^\star$ ein Eigenwert der sogenannten „Colleague Matrix" ist:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2c_n} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Tipp. Blatt 2 Aufgabe 2b. Es könnte hilfreich sein sich den Vektor $v = (T_0(x), \dots, T_{n-1}(x))^\top$ anzuschauen.

Bemerkung. Dies führt zu einem Algorithmus zur (globalen) Approximation aller Nullstellen einer stetigen Funktion $f \in C([a, b])$. Dazu muss man eine Tschebyscheff-interpolationsaufgabe und eine Eigenwertaufgabe lösen.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Das Verfahren von Heron approximiert die Quadratwurzel $a^{1/2}$ einer Zahl $a \geq 0$ durch die Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit der Funktion $\Phi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine Kontraktion im Intervall $((\frac{a}{2})^{1/2}, \infty)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heron mit dem Newton-Verfahren für die Funktion $x \mapsto x^2 - a$ übereinstimmt und untersuchen Sie hinreichende Bedingungen für die lokale, quadratische Konvergenz des Verfahrens.

(c) [**Bonus +2 Punkte**] Zeigen Sie, dass sich das Verfahren von Heron als Abstiegsverfahren für die Funktion $g(x) = x + \frac{a}{x}$ interpretieren lässt.

Aufgabe 3 (2+3+3 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}^n$, sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und sei $\phi(x) := \frac{1}{2}\|b - Ax\|_{A^{-1}}^2 = \frac{1}{2}\langle A^{-1}(b - Ax), b - Ax\rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für eine Approximation $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ der Lösung $x^* = A^{-1}b$ wird beim Abstiegsverfahren die Suchrichtung $\tilde{d} = -\nabla\phi(\tilde{x})$ verwendet.

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{d} = b - A\tilde{x}$ gilt und bestimmen Sie die Minimalstelle $\tilde{\alpha}$ der Funktion $t \mapsto \phi(\tilde{x} + t\tilde{d})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\phi(z) = \phi(x^*) + \frac{1}{2}\|z - x\|_A^2$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$.

(c) Zeigen Sie, dass mit dem optimalen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{x}^{neu} = \tilde{x} + \tilde{\alpha}\tilde{d}$ gilt

$$\|\tilde{x}^{neu} - x^*\|_A^2 = \|\tilde{x} - x^*\|_A^2 \left(1 - \frac{\|\tilde{d}\|^4}{\langle\tilde{d}, A\tilde{d}\rangle\langle\tilde{d}, A^{-1}\tilde{d}\rangle}\right)$$

(d) [**Bonus +2 Punkte.**] Sei $\kappa = \mathrm{cond}_2(A) = \lambda_{\max}\lambda_{\min}^{-1}$ die Konditionszahl von A. Verwenden Sie ohne Beweis die für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gültige Abschätzung

$$\frac{\langle x, Ax\rangle\,\langle x, A^{-1}x\rangle}{\|x\|^4} \leq \frac{(\lambda_{min} + \lambda_{\max})^2}{4\lambda_{min}\lambda_{max}},$$

um zu beweisen, dass

$$\|\tilde{x}^{neu} - x^*\|_A \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)\|\tilde{x} - x^*\|_A$$