Abteilung für
Angewandte Mathematik

SS 2024

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken

Praktische Übungen zu Numerik II

Projekt 1 – 24.04.2023

Abgabe: über **Ilias** bis Freitag, den 26.04.2023, 12:00 Uhr

---

Anmerkung: Die Aufgaben sind mit MatLab zu bearbeiten.

Projekt 1 (4 Punkte)**.** Plotten Sie den Graphen der Funktion

$$f\colon (0, 10^{-15}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(1+x)-1}{x}$$

im *double precision* Format. Geben Sie kurze Begründungen für

(i) den konstanten Wert gleich 0 ganz links im Graphen
(ii) den Sprung des Graphen von 0 auf 2
(iii) das Verhalten der Funktion zwischen den ersten beiden Sprüngen.

Projekt 2 (6 Punkte)**.** Sei f eine stetige Funktion auf $[-1, 1]$ und $n \geq 1$. Seien $x_j = cos(j\pi/n)$ die Menge der $n+1$ Chebyshev Punkte in $[-1, 1]$. Es existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom vom Grad n der Form $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, welches $p(x_j) = f(x_j)$ in den Chebyshev Punkten erfüllt. Dieses Polynom wird *Chebyshev Interpolant* genannt.
Man kann zeigen, dass p eine gut konditionierte Funktion bezüglich f ist (in dem Sinne, dass kleine Veränderungen in f zu kleinen Veränderungen in p führen). Sei Δf eine Funktion, die eine Veränderung in f beschreibt und Δp die resultierende Veränderung in p, dann gilt $\|\Delta p\|_\infty / \|\Delta f\|_\infty < 1 + (2/\pi) log(n+1)$ (siehe zum Beispiel *Approximation Theory and Approximation Practice*, Theorem 15.2.
Bestimmen Sie (mit Hilfe eines MatLab Programms) die kleinste ganzzahlige Zahl n, für die diese Abschätzung $\|\Delta p\| / \|\Delta f\| < 10$ nicht gewährleistet.
Anmerkung: Diese Aufgabe greift dem Vorlesungsstoff etwas voraus und ist als Einführung des Themas zu verstehen. Die Aufgabe kann an sich aber auch ohne Kenntnisse von Interpolation gelöst werden.

Projekt 3 (10 Punkte)**.** Die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist nach der Cramerschen Regel gegeben durch $x_i = \det A_i / \det A$, $i = 1, 2, \cdots, n$, wobei A_i jene Matrix ist, die entsteht, indem die $i-te$ Spalte von A durch den Vektor b ersetzt wird (in MatLab kann dies durch die Befehle $A\_i = A$ und $A\_i(:, i) = b$ realisiert werden).
Implementieren Sie die Cramersche Regel und testen Sie Ihr Programm für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.1440 \\ 0.8642 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung ist gegeben durch $x = [2, -2]^\top$. Bestimmen Sie für Ihre numerische Lösung $\tilde{x}$ den Vorwärtsfehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ sowie den Rückwärtsfehler $\|A\tilde{x} - b\|_\infty / \|b\|_\infty$. Betrachten Sie die Konsitionszahl von A und vergleichen Sie die Fehler mit denen der durch das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Pivotsuche berechneten numerischen Lösung $\hat{x}$ (Sie können $\hat{x}$ mit dem MatLab Befehl $x = A \setminus b$ errechnen).