# Praktische Übungen zu Numerik II

Projekt 2 – 29.04.2024

Abgabe: über **Ilias** bis Freitag, den 10.05.2024, 12:00 Uhr

---

**Anmerkung:** Die Aufgaben sind mit MatLab zu bearbeiten.

**Projekt 1** (10 Punkte)**.**

(a) Schreiben Sie ein Programm zur Bestimmung der Koeffizienten eines Interpolationspolynoms bezüglich der Newton-Basis für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und zugehörige -werte $y_0, \ldots, y_n$.

(b) Testen Sie Ihr Programm für die Funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ und $h(x) = |x|$ im Intervall $[-1, 1]$ bei Verwendung von äquidistanten Stützstellen und Tschebyscheff-Knoten. Werten Sie die Interpolationspolynome an den Punkten $z_j = -1 + 2j/100$, $j = 0, 1, \ldots, 100$ mit dem Horner-Schema aus und plotten Sie damit die Interpolationspolynome für $n = 1, 2, 4, 8$.

**Projekt 2** (10 Punkte)**.** Es gibt eine offensichtliche Methode um die Koeffizienten von $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ (wie in Projekt 2 vom letzten Blatt) zu berechnen:
man erstellt ein lineares Gleichungssystem $Ac = f$ für den Koeffizientenvektor $c = (c_0, \cdots, c_n)^\top$, löst dieses und verwendet dann $c$ um $p$ zu berechnen. Hierbei handelt es sich allerdings um einen unstabilen Algorithmus für ein gut konditioniertes Problem (die gute Konditionierung haben wir auf dem letzten Blatt gezeigt). Allerdings wird diese Methode häufig verwendet, so ist sie zum Beispiel auch in MatLab mit den Befehlen $polyfit$ und $poyval$ integriert. In dieser Aufgabe wollen wir uns dieses Vorgehen genauer anschauen.

(a) Informieren Sie sich in der MatLab Dokumentation über die beiden Befehle und testen Sie diese mit der Funktion $f(x) = |x|$ auf $[-1, 1]$ für $n = 40$ und $n = 80$. Bestimmen Sie jeweils die $\infty-$Norm des Vektors $c$. Verwenden Sie die Funktion $polyval$ um $p(xx)$ für $xx = linspace(-1, 1, 500)$ zu berechnen und plotten Sie $p(xx)$ gegen $xx$. Was beobachten Sie? Wie ist der Zusammenhang zwischen der von Ihnen berechneten Norm und Ihren Ergebnissen (berücksichtigen Sie dabei besonders den Einfluss des Maschinenepsilons von etwa $10^{-16}$).

Die Matrix A wird als Vandermonde Matrix bezeichnet. Sie hat Dimension $(n+1)\times(n+1)$ und die Spalten sind gerade die Funktionen $1, x, x^2, \cdots, x^n$ ausgewertet bei den $n+1$ Chebyshev Punkten.

(b) Erstellen Sie mit dem Befehl $vander(x)$ eine Vandermonde Matrix (x ist hierbei ein Vektor mit Chebyshev Punkten - die Spalten der entstehenden Matrix sind in umgekehrter Reihenfolge, mit $fliplr$ kann dies geändert werden). Berechnen Sie für $n = 40$ und $n = 80$ die Konditionszahl und kommentieren Sie ihr Ergebnis mit Blick auf das Maschinen Epsilon.