



## Praktische Übungen zu Numerik II

Projekt 3 – 13.05.2024

Abgabe: über **Ilias** bis Freitag, den 24.05.2024, 12:00 Uhr

---

**Anmerkung:** Die Aufgaben sind mit MatLab zu bearbeiten.

**Projekt 1** (10 Punkte). Auf dem letzten Blatt haben wir den instabilen Algorithmus *polyval*(*polyfit*) betrachtet. Tatsächlich gibt es eine einfache Modifikation dieses Algorithmus, sodass ein stabiler Algorithmus entsteht. Dieses Vorgehen wird *Arnoldi process* genannt. Die Idee ist eine Matrix  $V$  mit orthogonalen Spalten, welche den selben Raum wie  $A$  aufspannt. Dies einfach mit Hilfe einer QR-Zerlegung zu erreichen, ist allerdings nicht ausreichend, stattdessen wird ein Verfahren ähnlich dem Gram Schmidt Verfahren verwendet: Die erste Spalte besteht nur aus Einsen und ist unsere erste Spalte  $v_1$  von  $V$ . Die erste Spalte wird erreicht, in dem  $v_1$  mit  $x$  multipliziert wird und die Komponente in Richtung  $v_1$  abgezogen wird. Die dritte Spalte wird durch Multiplikation von  $v_2$  mit  $x$  und Abziehen der Komponenten in Richtung  $v_1$  und  $v_2$  berechnet usw. (Anm: im Gegensatz zum Gram Schmidt Verfahren wird hier keine Orthonormalität erreicht - ist aber auch nicht nötig). Hier ist eine Version von *polyfit*, die dieses Verfahren berücksichtigt. Der Output ist hierbei neben dem Koeffizienten Vektor  $c$  auch eine Hessenberg Matrix  $H$ , welche die Koeffizienten des Orthogonalisierungsprozesses speichert:

```
1 function [c,H] = polyfitA(x,y,n)
2 M = length(x); V = ones(M,1); H = zeros(n+1,n);
3 for k = 1:n
4 v = x.*V(:,k);
5 for j = 1:k
6 H(j,k) = V(:,j)'\*v/M;
7 v = v - H(j,k)*V(:,j);
8 end
9 H(k+1,k) = norm(v)/sqrt(M);
10 V = [V v/H(k+1,k)];
11 end
12 c = V'\*y/M;
```

Sobald Sie  $c$  und  $H$  berechnet haben, können Sie mit der folgenden *polyval* Version das Polynom bei dem Punktevektor  $xx$  auswerten:

```
1 function yy = polyvalA(c,H,xx)
2 M = length(xx); n = size(H,2); V = ones(M,1);
3 for k = 1:n
4 v = xx.*V(:,k);
5 for j = 1:k
6 v = v - H(j,k)*V(:,j);
7 end
8 V = [V v/H(k+1,k)];
9 end
10 yy = V*c;
```

Verwenden Sie diesen Code um analog zum letzten Blatt die selben Interpolationen für  $n = 40$  und  $n = 80$  zu berechnen (Projekt 2(a) Blatt 2). Plotten Sie Ihre Ergebnisse und berechnen Sie die  $\infty$ -Norm von  $c$ . Kommentiere Sie ihre Ergebnisse.

Anmerkung: Diese Aufgabe soll Ihnen vermitteln, dass kleine Änderungen eines Algorithmus zu (deutlich) verbesserten Ergebnissen führen können. In diesem Fall wird ein Verfahren, welches Sie aus dem letzten Semester kennen mit dem `polyfit` Algorithmus kombiniert. Wenn Sie sich weiter mit der Numerik beschäftigen, werden Sie feststellen, dass viele Algorithmen 'Weiterentwicklungen' von anderen Algorithmen sind.