Abteilung für
Angewandte Mathematik

SS 2024
Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken

Praktische Übungen zu Numerik II

Projekt 5 – 10.06.2024

Abgabe: über **Ilias** bis Freitag, den 21.06.2024, 12:00 Uhr

---

Anmerkung: Die Aufgaben sind mit MatLab zu bearbeiten.

Projekt 1 (10 Punkte)**.** Vergleichen Sie Tschebyscheff mit Legendre Knoten. Erstellen Sie Grafiken über die Positon der Punkte für $N = 5, 10, 15$ und überlegen Sie sich einen grafischen Weg um die Positionen der Punkte für $N \to \infty$ zu vergleichen (eine Möglichkeit wäre es eine Verteilungsdichte zu betrachten). Was beobachten Sie?

Projekt 2 (10 Punkte)**.** In dieser Aufgabe wollen wir uns noch eine andere Quadraturformel anschauen, die in der Vorlesung nicht besprochen wurde, die *Clenshaw-Curtis Quadratur*.
Die Clenshaw-Curtis-Quadratur ist eine Methode zur numerischen Integration, die auf der Interpolation durch Tschebyscheff-Polynome basiert. Es handelt sich um eine Quadraturformel der Ordnung n. Verwendet werden die Tschebyscheff-Knoten (Extremstellen der Tschebyscheff-Polynome vom Grad n).
Sei nun $f(x)$ eine Funktion, die auf $[-1, 1]$ definiert ist. Das Interpolationspolynom $p_n(x)$, das $f(x)$ an den Tschebyscheff-Knoten interpoliert, kann als Linearkombination der Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ geschrieben werden:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x),$$

wobei die Koeffizienten a_k aus den Funktionswerten $f(x_i)$ mithilfe der Fourier-Transformation berechnet werden.
Nun wird das Integral von $f(x)$ über $[-1, 1]$ durch das Integral von p_n angenähert:

$$I \approx Q(f) := \int_{-1}^{1} p_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Ihre Aufgabe besteht nun darin die auf der Vorlesungsseite verlinkten MatLab Funktionen *gauss.m* und *clenshaw_ curtis.m* auf die folgenden Funktionen anzuwenden:

$$f(x) = x^{20}$$
$$f(x) = e^{x}$$
$$f(x) = \frac{1}{1 + 16x^2}$$
$$f(x) = \sqrt{|x + 0.5|}$$
$$f(x) = |x|^3$$

Erstellen Sie dazu jeweils Grafiken, die den Fehler des Approximierten Integralwertes mit dem tatsächlichen Wert vergleicht für verschiedene Werte von n. Kommentieren Sie ihre Ergebnisse, berücksichtigen Sie dabei besonders den unterschiedlichen Exaktheitsgrad der Quadraturformeln.