

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 1

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>

Abgabe: 28.04.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der folgenden Funktionen.

(a) $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -1 & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

(b) $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}(x - \frac{\pi}{2}) + 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(x - \frac{3\pi}{2}) - 1, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

Skizzieren Sie die Funktionen f und g , sowie die ersten Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe. Überlegen Sie sich am Bild, dass die Partialsummen jeweils die Funktionen f und g approximieren.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Taylor-Reihe der natürlichen Logarithmus-Funktion benutzen um eine Reihe zu finden, die schnell gegen die Zahl $\ln(3)$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\ln(3) = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}\right)$$

gilt.

(b) Entwickeln Sie die Funktion $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ um die Stelle $x = 0$ für $x \in (-1, 1)$.

(c) Finden Sie damit eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, die gegen $\ln(3)$ konvergiert und finden Sie eine starke Abschätzung des Restglieds $R_N = \sum_{k=N}^{\infty} a_k$.

(d) Bestimmen Sie damit, wie viele Glieder der Reihe man höchstens berücksichtigen muss um $\ln(3)$ bis auf 10 Dezimalstellen zu berechnen.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge von stetigen Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass die f_n gleichmäßig gegen eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Limes $c_n := \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Für eine differenzierbare 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

und $c_k(f) := \frac{1}{2}(a_k(f) - ib_k(f))$. Man zeige:

$$c_k(f') = ikc_k(f).$$