Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
M. Stegemeyer

30. Juni 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 10

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 07.07.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

In dieser Aufgabe wollen wir ein physikalisches Problem durch eine Differentialgleichung modellieren. Ein Wassertank enthält zu Beginn 1000 Liter Wasser. Wir nehmen an, dass in den Wassertank beliebig viel Wasser passt. Im Wasser sind 80 kg Salz gelöst. Es gibt einen Zufluss zum Tank, in dem pro Minute 8 Liter Frischwasser eingelassen werden und es gibt einen Abfluss, aus dem pro Minute 4 Liter des im Tank befindlichen Wassers abfließen. Wir nehmen an, dass das Salz im Wasser immer homogen verteilt ist.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Menge (= Masse) des Salzes S im Tank.

(b) Finden Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung. *Hinweis: Ansatz* $S(t) = \frac{a}{b+ct}$.

(c) Wie viel Kilogramm Salz sind nach drei Stunden im Wasser gelöst?

(d) Zu welcher Zeit hat sich die Salzkonzentration halbiert?

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = ay - by^2, \quad y(0) = y_0$$

mit $a, b > 0$ und $a > by_0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + (\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a})e^{-at}}$$

für $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x^2)$. Geben Sie eine *interessante* Differentialgleichung an, die von der Funktion f gelöst wird.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, sodass gilt $\frac{y_0}{x_0} \in J$. Weiter nehmen wir an, dass $f(\frac{y_0}{x_0}) \neq \frac{y_0}{x_0}$.
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(\tfrac{y}{x}), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie folgende Aussage: Falls eine Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit $0 \notin I$ eine Lösung von (1) ist, so ist die Abbildung $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad z(x_0) = \frac{y_0}{x_0}. \tag{2}$$

Umgekehrt gilt, dass, falls $\psi\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) ist, so ist $\varphi\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x\psi(x)$ eine Lösung von (1).

(b) Bestimmen Sie mit (a) die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y}{x} + \exp\big(-\frac{y}{x}\big), \quad y(1) = 0.$$

Hinweis: Ansatz $y(x) = a\ln(\ln(x) + b)$ für das Anfangswertproblem (2).

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im folgenden ist jeweils ein Intervall $X \subseteq \mathbb{R}$ und eine Menge von Funktionen $M \subseteq C^0(X)$ gegeben. Bestimmen und begründen Sie, welche dieser Mengen $M \subset C^0(X)$ gleichgradig stetig sind:

(a) $X = [0,1]$, $M := \{t \mapsto t^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $X = [0,1)$, $M := \{t \mapsto t^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $X = [0,1]$, $M := \{t \mapsto \frac{t^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(d) $X = [0,2]$, $M := \{t \mapsto \frac{t^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.