Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 10

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>**Abgabe:** 07.07.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, sodass gilt $\frac{y_0}{x_0} \in J$. Weiter nehmen wir an, dass $f(\frac{y_0}{x_0}) \neq \frac{y_0}{x_0}$.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

- (a) Zeigen Sie folgende Aussage: Falls eine Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \notin I$ eine Lösung von (1) ist, so ist die Abbildung $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad z(x_0) = \frac{y_0}{x_0}. \quad (2)$$

Umgekehrt gilt, dass, falls $\psi: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) ist, so ist $\varphi: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x\psi(x)$ eine Lösung von (1).

- (b) Bestimmen Sie mit (a) die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y}{x} + \exp\left(-\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = 0.$$

Hinweis: Ansatz $y(x) = a \ln(\ln(x) + b)$ für das Anfangswertproblem (2).

Lösung:

- (a) Sei zunächst $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (1). Setze $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$. Es gilt dann

$$\psi'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

Da $\frac{\varphi(x)}{x} = \psi(x)$ und $\varphi'(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) = f(\psi(x))$, sehen wir also, dass gilt

$$\psi'(x) = \frac{f(\psi(x)) - \psi(x)}{x}$$

für alle $x \in J$ und somit ist ψ eine Lösung der Differentialgleichung (2). Man überprüft leicht, dass auch das Anfangswertproblem gelöst wird.

Sei nun $\psi: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2). Definiere $\varphi: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) = x\psi(x)$. Wir sehen direkt, dass gilt

$$\varphi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x).$$

Da ψ die Gleichung (2) löst, gilt also

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \psi(x) + x \frac{f(\psi(x)) - \psi(x)}{x} \\ &= f(\psi(x)) \\ &= f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right).\end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass φ die Differentialgleichung (1) erfüllt. Da $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ gilt also $\varphi(x_0) = y_0$ und somit löst φ das Anfangswertproblem (1).

- (b) Wir definieren die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) = u + \exp(-u)$. Dann ist die gegebene Differentialgleichung offenbar von der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

wie in Aufgabenteil (a). Wir können also nach (a) eine Lösung finden, indem wir zunächst die Differentialgleichung

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} = \frac{z + \exp(-z) - z}{x} = \frac{\exp(-z)}{x}.$$

untersuchen. Als Anfangswert erhalten wir $z(1) = \frac{0}{1} = 0$. Wir müssen also das Anfangswertproblem

$$z' = \frac{\exp(-z(x))}{x}, \quad z(1) = 0 \tag{3}$$

lösen.

Mit dem Hinweis versuchen wir den Ansatz $z(x) = a \ln(\ln(x) + b) = \ln((\ln(x) + b)^a)$ und berechnen die Ableitung

$$z'(x) = \frac{a}{\ln(x) + b} \cdot \frac{1}{x}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\exp(-z(x))}{x} = \frac{(\ln(x) + b)^{-a}}{x} = \frac{1}{(\ln(x) + b)^a \cdot x}.$$

Für $a = 1$ und beliebiges b haben wir also eine Lösung der Differentialgleichung gefunden. Man sieht leicht, dass $z(1) = 0$ genau dann, wenn $b = 1$ und somit erhalten wir die Funktion

$$z: \left(\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(x) = \ln(\ln(x) + 1)$$

als Lösung des Anfangswertproblems (3). Nach Aufgabenteil (a) ist damit die Funktion

$$y: \left(\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = x \ln(\ln(x) + 1)$$

eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.