

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 11

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>

Abgabe: 14.07.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

In dieser Aufgabe wollen wir für verschieden Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ das zugehörige Gradienten-Richtungsfeld (siehe Aufgabe 3) $\nabla f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachten, sowie die jeweils induzierte Differentialgleichung

$$y' = \nabla f(y).$$

- Bestimmen Sie jeweils den Gradienten von f .
- Skizzieren Sie den Gradienten als Richtungsfeld und
- Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung $y' = \nabla f(y)$.
- Tragen Sie in die Skizze einige der Lösungskurven ein.
- Auf welchen *Bahnen* bewegen sich jeweils die Lösungen? Finden Sie hierfür für einen beliebigen Anfangswert $y(0) = (c_1, c_2)$ jeweils eine null- oder ein-dimensionale Menge $S_{(c_1, c_2)} \subseteq \mathbb{R}^2$, in der sich die Lösung y bewegt.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

(c) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + \frac{\sin(\cos(1+y))}{1+x^2}, \quad y(1) = 0$$

für $x \in (0, 2)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 2

(7 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir sagen, dass eine stetig differenzierbare Funktion $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein *erstes Integral* für f ist, falls für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\langle \nabla H(x), f(x) \rangle = 0.$$

Falls eine physikalische Interpretation der Differentialgleichung vorliegt, spricht man auch von einer *Erhaltungsgröße*.

- (a) Sei H ein erstes Integral für f und sei $y: I \rightarrow \Omega$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ gilt. Zeigen Sie, dass H entlang y konstant ist.

Wir wollen nun einen Ansatz kennen lernen, wie im Fall $n = 2$ ein erstes Integral für gegebenes f gefunden werden kann. Wir schreiben $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als $f = (f_1, f_2)$.

- (b) Zeigen Sie, dass folgendes gilt: wenn $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und es ein $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\nabla H(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2) \begin{pmatrix} -f_2(x_1, x_2) \\ f_1(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

dann ist H ein erstes Integral.

- (c) Wir nehmen nun an, dass λ und f so sind, dass die Funktionen λf_1 und λf_2 stetig partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda f_2) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda f_1).$$

- (d) Sei $a > 0$. Nutzen Sie den obigen Ansatz um für die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ -ay_1 \end{pmatrix}$$

ein erstes Integral zu finden.

- (e) Sei $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lösung der Differentialgleichung in Teil (d) mit Anfangswert $y(0) = (0, 1)$. In welcher ein-dimensionalen Menge bewegt sich die Lösung y ?

Aufgabe 3

(5 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit einer geometrischen Interpretation von zeitunabhängigen Differentialgleichungen befassen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Wir interpretieren F nun als *Richtungsfeld*, d.h. jedem Punkt in $p \in \Omega$ wird ein Richtungsvektor $F(p) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Ein physikalisches Beispiel ist die Zuordnung der Windrichtung zu einem Punkt auf der Erdoberfläche. Wir können nun fragen, ob es Kurven $\gamma: I \rightarrow \Omega$ gibt mit $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so dass γ differenzierbar ist und so dass für alle $t \in I$ gilt $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$. Falls eine Kurve γ diese Eigenschaft hat, nennen wir sie *Integralkurve* zu F .

- (a) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Skizzieren Sie das Richtungsfeld $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

und überlegen Sie sich anhand der Skizze, wie die Integralkurven aussehen müssen.

- (b) Angenommen, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine Integralkurve zu F mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = (1, 0)$. Stellen Sie ein passendes Anfangswertproblem für γ auf und finden Sie die maximale Lösung zu diesem Anfangswertproblem.
- (c) Sei $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine stetige Funktion und $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie oben. Wir betrachten das Richtungsfeld $\tilde{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\tilde{F}(x, y) = g(x^2 + y^2) \cdot F(x, y)$. Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Integralkurve zu $\tilde{F}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\|\gamma\|: I \rightarrow \mathbb{R}$ konstant ist, wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm ist.