

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 11

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>

Abgabe: 14.07.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + \frac{\sin(\cos(1+y))}{1+x^2}, \quad y(1) = 0$$

für $x \in (0, 2)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung:

Wir wollen Satz 2.20 anwenden. Offensichtlich ist die Abbildung $f: (0, 2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 1 + \frac{\sin(\cos(1+y))}{1+x^2}$$

stetig. Wir müssen nun also die lokale Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y nachweisen. Zunächst bemerken wir, dass die Funktionen $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ global Lipschitz mit Lipschitz-Konstante 1 sind. Dies sieht man z.B. daran, dass die Supremumsnormen der jeweiligen Ableitungen gleich 1 sind. Seien nun $x \in (0, 2)$ und $y, z \in \mathbb{R}$. Dann ist offenbar $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$. Es gilt daher und wegen der oben erwähnten Lipschitz-Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, z)| &= \left| \frac{\sin(\cos(1+y))}{1+x^2} - \frac{\sin(\cos(1+z))}{1+x^2} \right| \\ &\leq |\sin(\cos(1+y)) - \sin(\cos(1+z))| \\ &\leq |\cos(1+y) - \cos(1+z)| \\ &\leq |(1+y) - (1+z)| \leq |y - z| \end{aligned}$$

und somit erfüllt f die Bedingung von Satz 2.20. Laut Satz 2.20 ist damit die maximale Lösung des Anfangswertproblems eindeutig.