Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 12

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>

Abgabe: 21.07.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

- (a) Es sei $\Omega := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und $(t_0, y_0) \in \Omega$. Besitzt die Gleichung

$$y' = -\sqrt{1 - y^2}$$

eine Lösung? Falls ja, berechnen Sie diese auf ihrem maximalen Existenzintervall und untersuchen Sie sie auf Eindeutigkeit.

- (b) Besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{1 - y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

eine Lösung auf $[0, \pi]$? Falls ja, ist diese eindeutig?

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen

(a) $y' = t y^3 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

(b) $u' = \frac{3e^t}{(1+e^t)u}$.

Für welche Anfangswerte sind die Gleichungen lösbar? Bestimmen Sie die jeweiligen maximalen Lösungen.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die *Bernoulli'sche Differentialgleichung*

$$z'(t) = f(t)z(t) + g(t)z(t)^\alpha$$

durch die Substitution $y := z^{1-\alpha}$ in die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = (1 - \alpha)(f(t)y(t) + g(t))$$

überführt wird.

- (b) Als Anwendung seien nun $f \equiv c_1$, $g \equiv c_2$ konstant mit $c_1, c_2 > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} z' &= c_1 z - c_2 z^2 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist und bestimmen Sie die maximale Lösung, indem Sie Teilaufgabe (a) verwenden.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Betrachten Sie das homogene Differentialgleichungs-System

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} Y.$$

- (a) Finden Sie ein Fundamentalsystem für dieses System.

Hinweis: Diagonalisieren Sie die Matrix!

- (b) Bestimmen Sie die maximal Lösung des Anfangswertproblems

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$