Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
M. Stegemeyer

14. Juli 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 12

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 21.07.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die *Bernoulli'sche Differentialgleichung*

$$z'(t) = f(t)z(t) + g(t)z(t)^\alpha$$

durch die Substitution $y := z^{1-\alpha}$ in die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = (1-\alpha)(f(t)y(t) + g(t))$$

überführt wird.

(b) Als Anwendung seien nun $f \equiv c_1$, $g \equiv c_2$ konstant mit $c_1, c_2 > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} z' &= c_1 z - c_2 z^2 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist und bestimmen Sie die maximale Lösung, indem Sie Teilaufgabe (a) verwenden.

Lösung:

(a) Sei z eine Lösung von $z' = fz + gz^\alpha$ und sei $y = z^{1-\alpha}$. Dann folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{d}{dt}\left(z(t)^{1-\alpha}\right) \\ &= (1-\alpha)z(t)^{-\alpha}z'(t) \\ &= (1-\alpha)z(t)^{-\alpha}(f(t)z(t) + g(t)z(t)^\alpha) \\ &= (1-\alpha)(f(t)z(t)^{1-\alpha} + g(t)) \\ &= (1-\alpha)(f(t)y(t) + g(t)) \qquad \text{(B)} \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt: Ist y eine Lösung von (B), dann ist $z := y^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eine Lösung der Bernoulli'schen Gleichung.

(b) Mit (a) setzen wir $y := z^{-1}$ und erhalten die Gleichung

$$y' = -c_1 y + c_2$$

Der Anfangswert wird $y(0) = z(0)^{-1} = 1$. Diese lineare Gleichung hat nach Satz 3.8 eine eindeutige maximale Lösung von der Form

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(-\int_0^t c_1\,dt\right)\left(1+\int_0^t c_2 \exp\left(\int_0^s c_1\,dr\right)ds\right) \\ &= e^{-c_1 t}\left(1 + c_2 \int_0^t e^{c_1 s} ds\right) \\ &= e^{-c_1 t}\left(1 + \frac{c_2}{c_1}(e^{c_1 t} - 1)\right) \\ &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$z(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1}}.$$