Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 1

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>

Abgabe: 28.04.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Taylor-Reihe der natürlichen Logarithmus-Funktion benutzen um eine Reihe zu finden, die schnell gegen die Zahl $\ln(3)$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\ln(3) = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}\right)$$

gilt.

(b) Entwickeln Sie die Funktion $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ um die Stelle $x = 0$ für $x \in (-1, 1)$.

(c) Finden Sie damit eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, die gegen $\ln(3)$ konvergiert und finden Sie eine starke Abschätzung des Restglieds $R_N = \sum_{k=N}^{\infty} a_k$.

(d) Bestimmen Sie damit, wie viele Glieder der Reihe man höchstens berücksichtigen muss um $\ln(3)$ bis auf 10 Dezimalstellen zu berechnen.

Lösung:

(a) Wir rechnen mit den Rechenregeln für den Logarithmus, dass gilt

$$2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{9}{3}\right) = \ln(3).$$

(b) Aus dem Skript, S. 164, kennen wir die Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

für $|x| < 1$. Wegen $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ findet man

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

für $|x| < 1$.

(c) Nach Teilaufgabe (a) sehen wir also, dass gilt

$$\ln(3) = 2 \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}\right) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{5^{2k+1}} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{7^{2k+1}}$$

was wir auch schreiben können als

$$\ln(3) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{2}{5^{2k+1}} + \frac{1}{7^{2k+1}} \right).$$

Wir wollen nun für $N \in \mathbb{N}$ das Restglied

$$R_N = 2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{2}{5^{2k+1}} + \frac{1}{7^{2k+1}} \right)$$

abschätzen. Offenbar gilt $\frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2N+1}$ für $k \geq N$. Wir wollen nun die geometrische Reihe ins Spiel bringen. Deshalb schreiben wir $\frac{1}{5^{2k+1}}$ als

$$\frac{1}{5^{2k+1}} = \frac{1}{5^{2N+1}} \frac{1}{5^{2(k-N)}}$$

für $k \geq N$ und analog für 7 statt 5. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned} R_N &\leq \frac{2}{2N+1} \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{5^{2N+1}} \frac{1}{5^{2(k-N)}} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{7^{2N+1}} \frac{1}{7^{2(k-N)}} \right) \\ &= \frac{2}{2N+1} \left(\frac{2}{5^{2N+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{25^m} + \frac{1}{7^{2N+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{49^m} \right) \\ &= \frac{2}{2N+1} \left(\frac{1}{12 \cdot 5^{2N-1}} + \frac{1}{48 \cdot 7^{2N-1}} \right), \end{aligned}$$

wobei wir die geometrische Reihe ausgenutzt haben: für $q < 1$ gilt, dass

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}.$$

(d) Durch Einsetzen findet man, dass

$$R_6 \leq 2.65 \cdot 10^{-10} \quad \text{und} \quad R_7 \leq 9.14 \cdot 10^{-12},$$

d.h. dass man also die ersten 7 Glieder berücksichtigen muss um $\ln(3)$ bis auf die einschließlich 10. Dezimalstelle zu berechnen.