Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer 28. April 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 2

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 05.05.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $f_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \\ \sqrt{n}, & \text{für } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, 2\pi]. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen 0, aber nicht im quadratischen Mittel.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{für } x \in [\pi - \frac{1}{n^2}, \pi + \frac{1}{n^2}] \\ 0, & \text{für } x \notin [\pi - \frac{1}{n^2}, \pi + \frac{1}{n^2}]. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0 im quadratischen Mittel, aber nicht punktweise.

(c) Gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Regelfunktionen auf $[0, 2\pi]$ mit den folgenden beiden Eigenschaften?

(i) $\|f_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$

(ii) für kein $x \in [0, 2\pi]$ konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Wir wollen mithilfe von Fourierreihen die Differentialgleichung

$$-f'' + 2f' - f = e^{ix} \tag{1}$$

lösen, d.h. wir suchen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, so dass für alle $x \in [0, 2\pi]$ gilt

$$-f''(x) + 2f'(x) - f(x) = e^{ix}.$$

Die Ableitung einer komplexwertigen Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)$

Anleitung:

(a) Zeigen Sie: Falls (1) eine unendlich oft differenzierbare, periodische Lösung f besitzt, dann erfüllen deren Fourierkoeffizienten c_k die Gleichung

$$(k + i)^2 c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ix}\, dx.$$

(b) Folgern Sie, dass $c_1 = (1 + i)^{-2}$ und $c_k = 0$ für $k \neq 1$ und dass damit eine mögliche Lösung die Funktion $f(x) = \frac{e^{ix}}{(1+i)^2}$ ist.

(c) Rechnen Sie nach, dass f tatsächlich die Gleichung (1) erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge dann auch im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{2}x), & 0 \le x \le \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \\ 0, & \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für all $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(y-x)\big) \quad \text{und} \quad \sin(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big).$$

(c) Zeigen Sie: die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

ist nicht die Fourierreihe einer Funktion aus V (komplexwertige Regelfunktionen, siehe S. 172).

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n\colon [a,b] \to [0,\infty)$. Wir nehmen an, dass für alle $x \in [a,b]$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ und dass für jedes $x \in [a,b]$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.