Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

28. April 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 2

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 05.05.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge dann auch im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{2}x), & 0 \le x \le \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \\ 0, & \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass die Folge der Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für all $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(y-x)\big) \quad \text{und} \quad \sin(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big).$$

(c) Zeigen Sie: die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

ist nicht die Fourierreihe einer Funktion aus V (komplexwertige Regelfunktionen, siehe S. 172).

Lösung:

(a) Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es zu $\frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{für alle} \quad n \ge N.$$

Dann gilt für alle $n \ge N$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2}{2\pi} \,\mathrm{d}x = \epsilon^2.$$

Somit gilt also $\|f_n - f\|_2 < \epsilon$ für alle $n \ge N$ und damit konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch im quadratischen Mittel gegen f.

(b) Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten der Funktion f. Sei $k \geq 0$, dann ist

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} \sin(\sqrt{2}x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} \big(\sin((\sqrt{2}-k)x) + \sin((\sqrt{2}+k)x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}-k}\big(-\cos(2\pi - \frac{2\pi k}{\sqrt{2}}) + 1\big) + \frac{1}{\sqrt{2}+k}\big(-\cos(2\pi + \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}) + 1\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}-k} + \frac{1}{\sqrt{2}+k}\Big)\big(1 - \cos(\tfrac{2\pi k}{\sqrt{2}})\big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{2-k^2}\big(1 - \cos(\tfrac{2\pi k}{\sqrt{2}})\big).
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichheit haben wir dabei den Term $\frac{1}{\sqrt{2}-k} + \frac{1}{\sqrt{2}+k}$ vereinfacht.
Analog berechnet man für $k > 0$ die Koeffizienten b_k und findet

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} \sin(\sqrt{2}x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} \big(\cos((\sqrt{2}-k)x) - \cos((\sqrt{2}+k)x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}-k}\sin(2\pi - \tfrac{2\pi k}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}+k}\sin(2\pi + \tfrac{2\pi k}{\sqrt{2}})\Big) \\
&= \frac{-\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{2-k^2}\sin(\tfrac{2\pi k}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Wir wollen nun das Majorantenkriterium benutzen um gleichmäßige Konvergenz zu zeigen. Für die Terme $g_k(x) = a_k\cos(kx)$, $x \in [0, 2\pi]$, $k \geq 1$ können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_\infty &= \Big|\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{2-k^2}\big(1 - \cos(\tfrac{2\pi k}{\sqrt{2}})\big)\Big|\|\cos(kx)\|_\infty \\
&\leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi k^2}
\end{aligned}$$

da die Funktion $x \mapsto \cos(kx)$ Supremumsnorm 1 hat und $|\frac{1}{2-k^2}| \leq \frac{2}{k^2}$ für alle $k \geq 1$. Zudem haben wir benutzt, dass $|1 - \cos(\frac{2\pi k}{\sqrt{2}})| \leq 2$. Mit einer ähnlichen Abschätzung findet man für die Funktionen $h_k(x) = b_k\sin(kx)$, $x \in [0, 2\pi]$, dass

$$\|h_k\|_\infty \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi k^2}.$$

Damit sehen wir also für die Reihe $\sum_{k=0}^\infty f_k$ mit $f_k = g_k + h_k$ dass

$$\|f_k\| \leq \frac{6\sqrt{2}}{\pi k^2}$$

für $k \geq 1$. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{6\sqrt{2}}{\pi k^2}$ ist konvergent und somit konvergiert die Fourier-Reihe der Funktion f nach dem Majorantenkriterium (Satz 2.1 in Abschnitt 8.2) gleichmäßig.

(c) Angenommen, es gibt eine Regelfunktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, sodass die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{-i}{2}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{für } k > 0 \quad \text{und} \quad c_k = \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{-k}} \quad \text{für } k < 0.$$

Nach Satz 3.3 und 3.5 aus Abschnitt 8 des Skripts muss

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

gelten. Da f nach Annahme eine Regelfunktion ist, ist die linke Seite endlich. Wir wissen aber, dass die rechte Seite divergiert. Dies liefert den gewünschten Widerspuch.