Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

05. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 3

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 12.05.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

(a) Betrachten Sie den Raum M der 0-1-Folgen der Länge n mit dem Hamming-Abstand. Zeigen Sie, dass eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt und ein $\xi \in M$ mit $\xi_n = \xi$ für alle $n \geq N$.

(b) Zeigen Sie, dass ein analoges Statement für jede Menge gilt, wenn wir sie mit der diskreten Metrik ausstatten.

(c) Sei M eine Menge und sei $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ die diskrete Metrik. Was sind die offenen Mengen in M?

(d) Wie sehen bildlich die ϵ-Umgebungen in $\mathbb{R}^2$ aus für die euklidische Metrik und für die ℓ^1-Metrik?

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie für folgende Mengen M und Abbildungen $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, dass (M, d) ein metrischer Raum ist.

(a) Den *Hamming-Abstand*, siehe Skript, S. 191, Bsp. (3)

(b) Die ℓ^1-Metrik auf $\mathbb{R}^2$, siehe Skript, S. 191, Bsp. (5)

(c) Die *diksrete Metrik* auf einer Menge $M \neq \emptyset$, siehe Skript, S. 191, Bsp. (6)

(d) Sei (M, d') ein metrischer Raum und definiere $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ durch $d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Seien $A_1, \ldots, A_k \subseteq X$ beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ und $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ wieder beschränkte Mengen sind.

(b) Finden Sie ein Beispiel eines metrischen Raums (X, d) und einer Familie von beschränkten Mengen $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ so dass $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ nicht beschränkt ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel eines metrischen Raums (X, d) so dass für jede Familie von beschränkten Mengen $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ gilt, dass $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ beschränkt ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Beweisen Sie Satz 1.14 in Kapitel 9: Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Für das Innere A° gilt

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{V \subset A,\\ V \text{ offen}}} V.$$

(b) A° ist offen.

(c) Für den Abschluss $\overline{A}$ gilt:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{K \supset A,\\ K \text{ abgeschlossen}}} K$$

(d) $\overline{A}$ ist abgeschlossen.