Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer 05. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 3

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 12.05.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie für folgende Mengen M und Abbildungen $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, dass (M, d) ein metrischer Raum ist.

(a) Den *Hamming-Abstand*, siehe Skript, S. 191, Bsp. (3)

(b) Die ℓ^1-Metrik auf $\mathbb{R}^2$, siehe Skript, S. 191, Bsp. (5)

(c) Die *diksrete Metrik* auf einer Menge $M \neq \emptyset$, siehe Skript, S. 191, Bsp. (6)

(d) Sei (M, d') ein metrischer Raum und definiere $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ durch $d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\}$.

Lösung:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge aller endlichen 0-1-Folgen der Länge n. Für $\xi, \eta \in M$ ist $d(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$ definiert als die Anzahl der Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ so dass $\xi_{i_j} \neq \eta_{i_j}$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $\xi_m = \eta_m$ für $m \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. In diesem Fall gilt dann also $d(\xi, \eta) = k$.

Wir wollen nun nachprüfen, dass d wirklich eine Metrik ist.

Es ist klar, dass d nicht negativ ist. Seien $\xi, \eta \in M$ mit $d(\xi, \eta) = 0$. Dann ist also per Definition die Anzahl der Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\xi_i \neq \eta_i$ null, das heißt also, dass ξ und η in allen Komponenten übereinstimmen. Zwei endliche Folgen, die in allen Komponenten übereinstimmen sind identisch, d.h. aus $d(\xi, \eta) = 0$ folgt $\xi = \eta$.

Die Symmetrie der Metrik ist klar, denn falls $\xi, \eta \in M$ mit $d(\xi, \eta) = k \in \{0, \ldots, n\}$ gibt es also genau k Indizes bei denen ξ und η nicht übereinstimmen. Bei genau diesen Indizes stimmen dann also auch η und ξ nicht überein, und somit gilt $d(\eta, \xi) = k = d(\xi, \eta)$.

Nun müssen wir noch die Dreiecks-Ungleichung nachprüfen. Seien $\xi, \eta, \omega \in M$. Sei $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Indizes, so dass $\xi_i \neq \eta_i$ für $i \in I$ und $\xi_j = \eta_j$ für $j \notin I$. Analog sei $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Indizes, so dass $\eta_i \neq \omega_i$ für $i \in J$ und $\eta_j = \omega_j$ für $j \notin J$. Es gilt also $d(\xi, \eta) = \#I$ und $d(\eta, \omega) = \#J$. Setze $K = I \cup J$. Wir behaupten, dass falls $i \notin K$, dann gilt $\xi_i = \omega_i$. Sei $i \notin K$, dann ist also $i \notin I$ und somit $\xi_i = \eta_i$. Da auch $i \notin J$ gilt also auch $\eta_i = \omega_i$ und somit $\xi_i = \omega_i$. Die Menge der Indizes, an der ξ und ω nicht übereinstimmen, ist also höchstens K und die Mächtigkeit von K ist

$$\#K \leq \#I + \#J$$

und damit

$$d(\xi, \omega) \leq \#K \leq \#I + \#J =\leq d(\xi, \eta) + d(\eta, \omega).$$

(b) Nun betrachten wir die ℓ^1-Metrik im $\mathbb{R}^2$, d.h. für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Zunächst ist wieder klar, dass d nicht-negativ ist. Angenommen für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0.$$

Dann muss also $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0$ gelten und damit $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.

Die Symmetrie rechnet man leicht nach, sie folgt aus der Symmetrie der Betragsfunktion in $\mathbb{R}$.

Zur Dreiecksungleichung: Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &= d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus der Dreiecksungleichung des Betrags auf den reellen Zahlen folgt.

(c) Sei M eine beliebige nicht-leere Menge. Wir betrachten die diskrete Metrik $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ wie im Skript und wollen zeigen, dass dies tatsächlich eine Metrik ist.

Per Definition ist klar, dass die diskrete Metrik nicht-negativ ist und dass aus $d(x, y) = 0$ folgt, dass $x = y$.

Die Symmetrie ist auch klar per Definition.

Für die Dreiecksungleichung seien $x, y, z \in M$. Falls $x = z$ so ist $d(x, z) = 0$ und es gilt für alle $y \in M$, dass

$$0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

da $d(x, y), d(y, z) \geq 0$. Falls $x \neq z$ so ist $d(x, z) = 1$. Da $x \neq z$ muss also $y \neq x$ oder $y \neq z$ gelten (mathematisches oder!) und somit gilt

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$$

und somit haben wir die Dreiecksungleichung gezeigt.

(d) Wir beginnen wieder mit der positiven Definitheit. Seien $x, y \in M$, dann ist $d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\}$ und somit $d(x, y) \geq 0$. Angenommen $d(x, y) = 0$ dann muss $d(x, y) = d'(x, y) = 0$ gelten. Da d' eine Metrik ist, gilt also $x = y$.

Für die Symmetrie bemerken wir, dass für $x, y \in M$ gilt $d'(x, y) = d'(y, x)$ und somit ist

$$d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\} = \min\{d'(y, x), 1\} = d(y, x).$$

Für die Dreiecksungleichung seinen $x, y, z \in M$. Es ist

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \min\{d'(x, z), 1\} \leq \min\{d'(x, y) + d'(y, z), 1\} \\ &\leq \min\{d'(x, y), 1\} + \min\{d'(y, z), 1\} = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass

$$\min\{a + b, c\} \leq \min\{a, c\} + \min\{b, c\}$$

für $a, b, c \geq 0$ gilt, wie man durch Fallunterscheidungen leicht sieht.