Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

12. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 4

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 19.05.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe
Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik auf Offenheit und Abgeschlossenheit. Geben Sie zudem die inneren Punkte, die Berührpunkte und die Randpunkte an.

(a) $X_1 = [0, 1) \times [0, 1)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

(b) $X_2 = X_1 \times \{0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

(c) $X_3 = \mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(d) $X_4 = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in (0, \infty)\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

(e) $X_5 = X_4 \cup \{0\} \times [-1, 1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Wir betrachten den Vektorraum der endlichen Folgen, d.h.

$$V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{R} \text{ so dass } \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = 0 \ \forall n \geq N\}.$$

Wir definieren die Abbildung $\|\cdot\|_1 : V \to [0, \infty)$ als

$$\|v\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \quad \text{für } v = (x_n)_n \in V.$$

Da immer nur endliche viele Terme $\neq 0$ in der Summe auftauchen ist dies wohldefiniert.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V ist.

(b) Zeigen Sie, dass V mit der Norm $\|\cdot\|_1$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir definieren für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Menge $T_N = \{x_n \mid n \geq N\} \subseteq X$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Folge $(x_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge.

(b) Es gilt $\lim_{N\to\infty} \delta(T_N) = 0$, wobei $\delta(A)$ der Durchmesser einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Entscheiden und begründen Sie ob folgende Aussagen richtig sind:

(a) Sei $0 \leq t \leq 1$ und betrachten Sie die Funktion $f\colon [0, t] \to [0, t]$, $f(x) = \frac{t+x^2}{2}$. Für jedes $x_0 \in [0, t]$ konvergiert die Folge $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots)$.

(b) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossener Menge $A \subseteq Y$ unter f abgeschlossen in X ist.