Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

12. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 4

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 19.05.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir definieren für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Menge $T_N = \{x_n \mid n \geq N\} \subseteq X$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Folge $(x_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge.

(b) Es gilt $\lim_{N\to\infty} \delta(T_N) = 0$, wobei $\delta(A)$ der Durchmesser einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist.

Lösung:

Wir zeigen zunächst die Implikation a) $\implies$ b).
Sei $\epsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Nach Definition des Durchmessers gilt also $\delta(T_N) < \epsilon$. Mit der Definition des Durchmessers sehen wir außerdem direkt, dass $\delta(T_M) \leq \delta(T_N)$ für alle $M \geq N$. Somit haben wir also gezeigt, dass es zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\delta(T_M) < \epsilon \quad \text{für alle } M \geq N.$$

Dies bedeutet also, dass $\lim_{N\to\infty} \delta(T_N) = 0$.
Nun zeigen wir die Implikation b) $\implies$ a). Sei $\epsilon > 0$. Da nach Voraussetzung $\delta(T_N) \to 0$ für $N \to \infty$ gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\delta(T_N) < \epsilon$ für alle $N \geq N_0$. Seien nun $n, m \geq N_0$, dann gilt

$$d(x_n, x_m) \leq \delta(T_{N_0}) < \epsilon,$$

da ja $x_n, x_m \in T_{N_0}$. Damit sehen wir, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.