Abteilung für Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

19. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 5

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 26.05.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien (M, d) und (M', d') metrische Räume und $f\colon M \to M'$ eine stetige, surjektive Abbidlung. Zeigen Sie, dass M' zusammenhängend ist, falls M zusammenhängend ist.

Lösung:

Wir nehmen an, dass M' nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es offene nicht-leere Mengen $A, B \subseteq M'$ sodass $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = M'$. Da f stetig ist, sind auch $f^{-1}(A) \subseteq M$ und $f^{-1}(B) \subseteq M$ offen. Wegen der Surjektivität von f gilt

$$f^{-1}(A) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Man sieht zudem leicht, dass wegen $A \cap B = \emptyset$ gilt, dass

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset.$$

Weiterhin gilt $M = f^{-1}(M') = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ und somit ist M nicht zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung und somit folgt die Aussage.