Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

26. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 6

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 02.06.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

Betrachten Sie den Vektorraum $C^0([0,1],\mathbb{R})$ welchen wir mit der Supremumsnorm ausstatten.

(a) Zeigen Sie, dass die *Einheitskugel*

$$B_1(0) = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\| \leq 1\}$$

beschränkt und abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist, indem Sie zeigen, dass sie nicht folgenkompakt ist.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien K und L kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge

$$K + L := \{z = x + y, \mid x \in K, y \in L\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ und zeigen Sie, dass diese in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar sind.

(a) $f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{y}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & (x,y) \notin \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\} \\ 0, & (x,y) \in \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$

(b) Sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und wir definieren $f_2(x,y) = yg(x)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $p \in [1,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Abbildung $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ durch

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist.

Hinweis: Leiten Sie für $x,y \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x+y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

her und wenden Sie auf die beiden Summanden auf der rechten Seite die Hölder-Ungleichung (Satz 3.9 in Kapitel 6 im Skript) an.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_{\max}$.