Abteilung für Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

26. Mai 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 6

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 02.06.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $p \in [1, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Abbildung $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ durch

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist.

Hinweis: Leiten Sie für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x+y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

her und wenden Sie auf die beiden Summanden auf der rechten Seite die Hölder-Ungleichung (Satz 3.9 in Kapitel 6 im Skript) an.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_{\max}$.

Lösung:

(a) Sei $p \in [1, \infty)$. Es ist klar, dass $\|\cdot\|_p$ positiv ist. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 0$, so gilt auch $\|x\|^p = 0$ und wir sehen, dass also

$$|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p = 0$$

gilt. Somit muss aber $x_1 = \ldots = x_n = 0$ sein und damit ist $\|\cdot\|_p$ positiv definit.

Die Homogenität ist leicht zu sehen, es gilt

$$\|\lambda x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(|\lambda|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|x\|_p$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nun zeigen wir, dass die Dreiecksungleichung gilt. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x + y = 0$ ist die Dreiecksungleichung trivial. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x + y \neq 0$. Im Fall $p = 1$ ist die Dreiecksungleichung leicht zu sehen, sie folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion. Sei daher $p > 1$ und $q \in (1, \infty)$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man rechnet leicht nach, dass insbesondere $q(p-1) = pq - q = p$ gilt. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1}. \end{aligned}$$

Für die beiden Summanden benutzen wir nun die Hölder-Ungleichung, siehe Skript, Kapitel 6, Satz 3.9. Es gilt dann also (die Hölder-Ungleichung wird im zweiten Schritt benutzt)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\|_p \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} + \|y\|_p \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Nun teilen wir durch $\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}}$ und wegen $p - \frac{p}{q} = 1$ folgt

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Für $x = 0$ ist die Aussage trivial, daher nehmen wir an, dass $x \neq 0$. Es gilt

$$\|x\|_p = \Big|\|x\|_{\max} \frac{x}{\|x\|_{\max}}\Big|_p = \|x_{\max}\| \Big(\sum_{i=1}^n (\tfrac{|x_i|}{\|x\|_{\max}})^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Nach Definition der Maximumsnorm gilt $\frac{|x_i|}{\|x\|_{\max}} \leq 1$. Somit erhalten wir die Abschätzung

$$1 \leq \Big(\sum_{i=1}^n (\tfrac{|x_i|}{\|x\|_{\max}})^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}}.$$

Es gilt $n^{\frac{1}{p}} = \exp(\frac{1}{p}\ln(n)) \to 1$ für $p \to \infty$. Somit erhalten wir

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x_{\max} \lim_{p\to\infty} \|\Big(\sum_{i=1}^n (\tfrac{|x_i|}{\|x\|_{\max}})^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\max},$$

was zu zeigen war.