Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

02. Juni 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 7

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 16.06.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe
Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $f'(0,v)$ für $v = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die Produktregel für den Gradienten, d.h. zeigen Sie, dass gilt

$$\nabla(fg)(x) = (\nabla f(x))g(x) + f(x)\nabla g(x)$$

für alle $x \in U$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $\gamma, \sigma\colon (a,b) \to U$ stetig differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie die Produktregel für das Skalarprodukt, d.h. zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma(t), \sigma(t)\rangle = \langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t), \sigma(t)\rangle + \langle \gamma(t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t)\rangle$$

für alle $t \in (a,b)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \cos(x) \\ e^{x-y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(u,v,w) = \begin{pmatrix} uw \\ w^2 + v \end{pmatrix}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $Jf(x,y)$ und $Jg(u,v,w)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der verketteten Abbildung $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, indem Sie einerseits die Kettenregel benutzen und andererseits, indem Sie die Jacobi-Matrix direkt ausrechnen.

(b) Wir betrachten die Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(u,v,w,z) = \begin{pmatrix} 2uw + 2vz \\ 2vw - 2uz \\ u^2 + v^2 - w^2 - z^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$$

für $(u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$ und $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $Jf(u,v,w,z)$ und $Jg(a,b,c)$ für $(u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$ und $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix für die Abbildung $g \circ f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ um den Punkt $(u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$ einerseits mithilfe der Kettenregel und andererseits durch direkte Berechnung.

(iii) Bestimmen Sie den Rang von Jf und Jg.

(iv) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist $p = (u,v,w,z) \in \mathbb{R}^4$ und $v \in \mathbb{R}^4$ mit $\langle v, p\rangle = 0$, dann gilt

$$(J(g \circ f)(p)) \cdot v = 0.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $c \in \mathbb{R}$ definiert als $c = f(x)$. Zeigen Sie, dass der Gradient ∇f senkrecht auf der Niveaufläche

$$N_f(c) = \{y \in U \mid f(y) = c\}$$

steht, indem Sie zeigen, dass folgendes gilt: Ist $\varphi\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi((-\epsilon,\epsilon)) \subseteq N_f(c)$, dann gilt

$$\langle \varphi'(0), \nabla f(x)\rangle = 0.$$