Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Ružička
M. Stegemeyer

02. Juni 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 7

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html`

Abgabe: 16.06.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Seien $f, g \colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die Produktregel für den Gradienten, d.h. zeigen Sie, dass gilt

$$\nabla(fg)(x) = (\nabla f(x))g(x) + f(x)\nabla g(x)$$

für alle $x \in U$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $\gamma, \sigma \colon (a, b) \to U$ stetig differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie die Produktregel für das Skalarprodukt, d.h. zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma(t), \sigma(t)\rangle = \langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t), \sigma(t)\rangle + \langle \gamma(t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t)\rangle$$

für alle $t \in (a, b)$.

Lösung:

(a) Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir betrachten die partielle Ableitung $\partial_i(fg)$. Für die partiellen Ableitung gilt die normale Produktregel aus eindimensionaler Analysis, d.h. für alle $x \in U$ gilt

$$\partial_i(fg)(x) = (\partial_i f(x))g(x) + f(x)\partial_i g(x).$$

Da der Gradient einer Funktion $h \colon U \to \mathbb{R}$ definiert ist als, $\nabla h(x) = (\partial_1 h(x), \dots, \partial_n h(x))^T$ sehen wir also, dass für $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned}
\nabla(fg)(x) &= \big(\partial_1(fg)(x), \dots, \partial_n(fg)(x)\big)^T \\
&= \big((\partial_1 f(x))g(x) + f(x)\partial_1 g(x), \dots, (\partial_n f(x))g(x) + f(x)\partial_n g(x)\big)^T \\
&= \big(\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)\big)^T g(x) + f(x)\big(\partial_1 g(x), \dots, \partial_n g(x)\big)^T \\
&= (\nabla f(x))g(x) + f(x)\nabla g(x).
\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ für $t \in (a, b)$ und analog für σ. Für $t \in (a, b)$ gilt

$$\langle \gamma(t), \sigma(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t)\sigma_i(t).$$

Wir leiten dies nach t ab und erhalten mit der eindimensionalen Produktregel, dass gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma(t), \sigma(t)\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t)\sigma_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_i(t)\sigma_i(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)\sigma_i(t) + \gamma_i(t)\sigma_i'(t) \\
&= \langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t), \sigma(t)\rangle + \langle \gamma(t), \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t)\rangle.
\end{aligned}$$