Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
M. Stegemeyer

16. Juni 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 8

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 23.06.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ positiv semidefinit ist. Zeigen Sie weiter, dass der Punkt $(0,0)$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = f(tx_0, ty_0)$ bei $t=0$ ein lokales Minimum hat.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Abbildung $F : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$F(r,\theta,\phi) := \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante von F in Abhängigkeit von $(r,\theta,\phi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$.

(b) In welchen Punkten $(r,\theta,\phi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ ist $JF(r,\theta,\phi)$ invertierbar?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen. Berechnen Sie jeweils die Hesse-Matrix in den kritischen Punkten und geben Sie an, was die Hesse-Matrix über die kritischen Punkte aussagt.

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = x^2 + y^3 - 4x - 9y$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = (x^2+y^3)\exp(-2x)$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren den *Laplaceoperator* Δ durch

$$\Delta : C^2(U) \to C^0(U) \qquad \Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $f,g \in C^2(U)$ gilt

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g.$$

(b) Eine Funktion $f \in C^2(U)$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta f = 0$. Sei nun $n \geq 2$. Verifizieren Sie, dass die Funktionen $\Phi_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \ln\|x\|, & n = 2 \\ \|x\|^{2-n}, & n > 2 \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch sind.