

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 8

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html>

Abgabe: 23.06.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Die Abbildung $F : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$F(r, \theta, \phi) := \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante von F in Abhängigkeit von $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$.
- (b) In welchen Punkten $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ ist $JF(r, \theta, \phi)$ invertierbar?

Lösung:

- (a) Anwendung der bekannten Rechenregeln liefert

$$JF(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante (z.B. mit der Regel von Sarrus) ist

$$\begin{aligned} \det(JF(r, \theta, \phi)) &= r^2 \cos^2(\phi) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \sin^3(\theta) \sin^2(\phi) \\ &\quad - [-r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) \sin(\theta) - r^2 \sin^3(\theta) \cos^2(\phi)] \\ &= r^2 \sin(\theta) [\cos^2(\phi) \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)] \\ &= r^2 \sin(\theta) [\cos^2(\phi)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \sin^2(\phi)(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))] \\ &= r^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

- (b) Die Matrix ist also invertierbar, wenn $\sin(\theta) \neq 0$ ist, d.h. für $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ (und r, ϕ beliebig).