Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
M. Stegemeyer

23. Juni 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 9

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 30.06.2025, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

Zeigen Sie mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\cos(xyz) + yz - x &= 0 \\ (xyz)^2 + z &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutig stetig differenzierbare Auflösung

$$g\colon (1-\epsilon, 1+\epsilon) \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x) = (g_y(x), g_z(x))$$

besitzt, d.h. dass für $x \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} 2\cos(x\, g_y(x)\, g_z(x)) + g_y(x)\, g_z(x) - x &= 0 \\ (x\, g_y(x)\, g_z(x))^2 + g_z(x) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $k, m \in \mathbb{N}$ und $n = k + m$. Sei

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, wobei wir einen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ so schreiben, dass $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^m$ ist. Sei nun $(a, b) \in \mathbb{R}^n$ gegeben mit $F(a, b) = c \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass die Matrix

$$J_y F(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ von (a, b) gibt mit $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g\colon U_1 \to U_2$ gibt mit $F(x, g(x)) = c$ für alle $x \in U_1$.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$Jg(a, b) = -(J_y F(a, b))^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(a, b) \end{pmatrix}.$$

(c) In der Vorlesung haben wir den Satz über die Umkehrfunktion benutzt um den Satz über implizit definierte Funktionen zu beweisen. Zeigen Sie, dass wir auch umgekehrt hätten vorgehen können, d.h. zeigen Sie, dass der Satz über die Umkehrfunktion (Satz 4.4 in Kapitel 11) aus dem Satz über implizit definierte Funktionen (Satz 4.8 in Kapitel 11) folgt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ gibt, in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x, y) aufgelöst werden kann.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \exp(-\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)) \quad \text{und} \quad \varphi(x,y) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5}$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren die Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 1$.

(b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die vom Punkt $(1, 1, 1)$ in der euklidischen Norm den größten, bzw. kleinsten Abstand haben.