Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
M. Stegemeyer 23. Juni 2025

Analysis II

SoSe 2025 — Blatt 9

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ss25/ana2/index.html

Abgabe: 30.06.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ gibt, in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x, y) aufgelöst werden kann.

Lösung:

Wir überprüfen die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(z, x, y) := \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist f stetig differenzierbar (die Komponenten sind Summen, Produkte und Verknüpfungen differenzierbarer Funktionen). Außerdem gilt $f(0, 0, 0) = 0$. Die Jacobimatrix von f ist

$$\begin{pmatrix} \cos(z^3 - y^2 + x) + \sin(x + y + z) & -2y\cos(z^3 - y^2 + x) + \sin(x + y + z) & 3z^2\cos(z^3 - y^2 + x) + \sin(x + y + z) \\ 2x\cos(-z^3 + x^2 + y) - \sin(x - y) & \cos(-z^3 + x^2 + y) + \sin(x - y) & -3z^2\cos(-z^3 + x^2 + y) \end{pmatrix}$$

Ausgewertet am Punkt (0,0,0) ergibt sich

$$Jf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat offensichtlich vollen Rang. Nach dem Satz für implizite Funktionen gibt es nun Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^3$ von (0,0,0) und $V \subset \mathbb{R}$ von 0 und eine Abbildung $G = (g_1, g_2) : V \to \mathbb{R}^2$, sodass $f^{-1}(0) \cap U = \mathrm{Graph}(G)$. Mit anderen Worten: Es gilt $f(g_1(z), g_2(z), z) = 0$ für $z \in V$.
Also ist $x = g_1(z)$, $y = g_2(z)$ eine lokale Lösung des Systems.