Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele
Dipl.-Math. J. Daube

21.10.2015

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 1

Aufgabe 1 (Young-Ungleichung) (4 Punkte)

Für $p, q \in (1, \infty)$ gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, außerdem seien $a, b \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.
- $ab \leq \varepsilon a^p + \frac{(p\varepsilon)^{1-q}}{q} b^q$.

Aufgabe 2 (Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$) (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $p \in [1, \infty]$.

- Geben Sie die Definition der schwachen Ableitung an.
- Definieren Sie den Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$ sowie die zugehörige Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
- Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\Omega)$ mit der zugehörigen Norm ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (Stetige Banachraum-wertige Funktionen) (4 Punkte)

Für ein Zeitintervall $I = (0, T)$ und einen Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ sei

$$C^0(\bar{I}, X) = \{\, u : \bar{I} \to X \mid u \text{ stetig} \,\}$$

der Raum der stetigen, X-wertigen Funktionen auf $\bar{I}$ und

$$\|u\|_{C^0(\bar{I},X)} := \max_{t \in \bar{I}} \|u(t)\|_X.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- $\|\cdot\|_{C^0(\bar{I},X)}$ ist wohldefiniert und eine Norm auf $C^0(\bar{I}, X)$.
- $C^0(\bar{I}, X)$ ist bezüglich $\|\cdot\|_{C^0(\bar{I},X)}$ ein Banachraum.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es bezeichne $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die offene, n-dimensionale Einheitskugel. Für $t \in [1, 2]$ sei

$$\begin{aligned} [u(t)] : B_1(0) &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto t\,|x|^\alpha. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass gilt $u \in C([1, 2], W^{1,2}(B_1(0)))$.

Abgabe: Mittwoch, den 28.10.2015 in der Vorlesung