Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele
Dipl.-Math. J. Daube

28.10.2015

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 2

Aufgabe 1 (Gronwall-Lemma) (4 Punkte)

Seien $u, \alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I = [t_0, t_1)$. Bewiesen Sie die beiden folgenden Varianten des Lemmas von Gronwall.

- *Differentielle Form.* Sei $u \in C^1(I)$, so dass für alle $t \in I$ gilt

$$u'(t) \le \alpha(t) + \beta(t)u(t).$$

Für alle $t \in I$ folgt dann

$$u(t) \le u(t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^t \alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s.$$

- *Integralform.* Es gelte $\beta \ge 0$ in I und für alle $t \in I$

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s$$

Für alle $t \in I$ folgt dann

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s.$$

Aufgabe 2 (Elementare Eigenschaften) (6 Punkte)

- Das Bochner-Integral ist unabhängig von der Darstellung der Treppenfunktion, d.h. falls

$$s = \sum_{i=1}^n x_i\chi_{B_i} = \sum_{j=1}^m y_j\chi_{C_j},$$

so gilt

$$\int_I s(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n x_i\lambda(B_i) = \sum_{j=1}^m y_j\lambda(C_j).$$

Seien nun X, Y Banachräume. Beweisen Sie für $u \in L^1(I, X)$ die folgenden Aussagen.

- $\| \int_I u(t)\,\mathrm{d}t\|_X \le \int_I \|u(t)\|_X\,\mathrm{d}t$.
- Sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann ist $Tu \in L^1(I, Y)$ und es gilt

$$T\left(\int_I u(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I Tu(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Sei $F \in X^*$. Dann ist $\langle F, u(\cdot)\rangle_X \in L^1(I)$ und es gilt

$$\left\langle F, \int_I u(t)\,\mathrm{d}t\right\rangle_X = \int_I \langle F, u(t)\rangle_X\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3 (Energie-Abschätzung) (6 Punkte)

Sei $u : I \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{in } I \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{in } I \times \partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \text{ in } \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

zu gegebenen Daten $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$.
Ziel dieser Aufgabe ist es, für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung (1) eine zur Vorlesung analoge Energieabschätzung der Form

$$\|u\|_X + \|u\|_Y \le c(\|u_0\|_Z, \|f\|_V) \tag{2}$$

herzuleiten und dabei noch einmal die "natürlichen" Funktionenräume X, Y, Z, V zu motivieren.

- Zeigen Sie zunächst formal (d.h. unter der Annahme, dass u und f hinreichend glatte Funktionen sind), dass

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t,\cdot)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \big(f(t,\cdot), u(t,\cdot)\big)_{L^2(\Omega)}. \tag{3}$$

  für alle $t \in [0, T]$ gilt.
- Leiten Sie nun aus (3) eine Energieabschätzung der Form (2) ab. Wählen Sie dazu einen der folgenden beiden Zugänge:
  - *Gronwall-Zugang:* Integrieren Sie (3) bezüglich t und wenden Sie anschließend eine geeignete Form des Gronwall-Lemmas an. Schlagen Sie dabei auch geeignete Regularitätsklassen für u_0 und f vor und schließen Sie daraus auf die in der Vorlesung motivierten (natürlichen) Bochner-Räume für eine Lösung u, sowie auf die gewünschte Energieabschätzung.
  - *Absorbtion:* Integrieren Sie (3) bezüglich t und wenden Sie anschließend die ε-Version der Young-Ungleichung an, um die rechte Seite der entstandenen Gleichung in der linken "zu absorbieren". Schlagen Sie dabei wieder geeignete Regularitätsklassen für u_0 und f vor und schließen Sie daraus auf die (natürlichen) Bochner-Räume für eine Lösung u, sowie auf die gewünschte Energieabschätzung.

Abgabe: Mittwoch, den 04.11.2015 in der Vorlesung