Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele
Dipl.-Math. J. Daube

11.11.2015

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}((a,b))$ schwach differenzierbar mit $u' = 0$ fast überall in (a,b). Zeigen Sie, dass eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $u = C$ fast überall in (a,b) gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}((a,b))$ und sei $y \in (a,b)$. Die Funktion $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei durch $v(x) = \int_y^x u(t)\,\mathrm{d}t$ gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- v ist wohldefiniert.
- v ist stetig.
- v ist schwach differenzierbar.
- $v' = u$ fast überall in (a,b).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $u \in W^{1,p}((a,b))$ mit $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $\bar{u} \in C([a,b])$ mit den beiden folgenden Eigenschaften existiert:

- $u = \bar{u}$ fast überall in (a,b).
- Für alle $x, y \in [a,b]$ gilt $\bar{u}(y) - \bar{u}(x) = \int_x^y u'(t)\,\mathrm{d}t$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht notwendigerweise beschränktes Intervall, X, Y, Z Banachräume und $p, q, r \in [1, \infty]$.

- Ziel ist es für $p \le q$ und $r \in [p,q]$ die Stetigkeit der Einbettung
$$L^p(I,X) \cap L^q(I,X) \hookrightarrow L^r(I,X)$$
zu zeigen. Der Raum $L^p(I,X) \cap L^q(I,X)$ ist dabei mit der Norm
$$\|\cdot\|_{L^p(I,X)\cap L^q(I,X)} = \|\cdot\|_{L^p(I,X)} + \|\cdot\|_{L^q(I,X)}$$
ausgestattet. Zeigen Sie dazu für alle $u \in L^p(I,X) \cap L^q(I,X)$, dass $u \in L^r(I,X)$ und
$$\|u\|_{L^r(I,X)} \le \|u\|_{L^p(I,X)\cap L^q(I,X)}$$
gilt.
- Sei $B : X \times Y \to Z$ eine stetige, bilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass B durch
$$\widetilde{B}(u,v)(t) = B\big(u(t), v(t)\big)$$
eine stetige, bilineare Abbildung $\widetilde{B} : L^p(I,X) \times L^q(I,Y) \to L^r(I,Z)$ induziert, falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gilt.

Abgabe: Mittwoch, den 18.11.2015 in der Vorlesung