Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele 18.11.2015
Dipl.-Math. J. Daube

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 5

Aufgabe 1 (Äquivalente Normen auf $W_0^{1,p}(\Omega)$) (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $p \in [1,\infty]$.

- Zeigen Sie, dass auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ durch

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \text{ und } \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

  äquivalente Normen definiert sind.
- Begründen Sie, warum diese Normäquivalenz nicht auf $W^{1,p}(\Omega)$ gelten kann.

Aufgabe 2 (Separabilität) (4 Punkte)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, X ein Banachraum und $p \in [1,\infty)$. Zeigen Sie, dass $L^p(I,X)$ genau dann separabel ist, wenn X separabel ist.

Aufgabe 3 (Faltung) (4 Punkte)

Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,\infty]$, und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Faltung $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Aufgabe 4 (Dichtheit) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $p \in [1,\infty)$ die Räume $C^\infty(I)$ und $C_0^\infty(I)$ dicht in $L^p(I)$ liegen. Was gilt für $p = \infty$?

Abgabe: Mittwoch, den 25.11.2015 in der Vorlesung