Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele 25.11.2015
Dipl.-Math. J. Daube

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 6

Aufgabe 1 (Dualraum von $L^p(\Omega)^d$) (4 Punkte)
Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $p \in (1,\infty)$ mit dualem Exponenten $q = \frac{p}{p-1}$, sei der Raum $L^p(\Omega)^d$ mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)^d} = \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

für $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in L^p(\Omega)^d$ ausgestattet. Folgern Sie aus dem Darstellungssatz von Riesz in $L^p(\Omega)$, dass für alle $L \in \left(L^p(\Omega)^d\right)^*$ eine eindeutig bestimmte Funktion $v = (v_1, v_2, \dots, v_d) \in L^q(\Omega)^d$ existiert, so dass

$$L(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^d v_i(x) u_i(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in L^p(\Omega)^d$ und

$$\|L\|_{\left(L^p(\Omega)^d\right)^*} = \left(\sum_{i=0}^d \|v_i\|_{L_q(\Omega)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

gelten.

Aufgabe 2 (Darstellungssatz von Riesz in $W^{1,p}(\Omega)$) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Aufgabe 1 für jedes beschränkte, lineare Funktional $L \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^*$ Funktionen $v_0, v_1, \dots, v_d \in L^q(\Omega)$ existieren, so dass

$$L(u) = \int_\Omega \left(v_0(x)u(x) + \sum_{i=1}^d v_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\|L\|_{\left(W^{1,p}(\Omega)^d\right)^*} = \left(\sum_{i=0}^d \|v_i\|_{L_q(\Omega)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

gelten.

Aufgabe 3 (Stetig differenzierbare Banachraum-wertige Funktionen) (4 Punkte)
Für ein Zeitintervall $I = (0,T)$ und einen Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt eine Funktion $u : \bar{I} \to X$ (*klassisch* oder *stark*) differenzierbar in $t \in \bar{I}$, wenn es ein $u_t(t) \in X$ gibt, so dass

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in[0,T]}} \left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u_t(t)\right\|_X = 0.$$

$u_t(t)$ heißt (*klassische* oder *starke*) Ableitung von u in t. Falls u in allen $t \in \bar{I}$ differenzierbar ist, dann heißt u differenzierbar. Es bezeichne $C^1(\bar{I}, X)$ den Raum

$$\left\{ u \in C^0(\bar{I}, X) \,|\, u \text{ differenzierbar}, \; u_t \in C^0(\bar{I}, X) \right\}$$

der stetig differenzierbaren X-wertigen Funktionen auf $\bar{I}$. Beweisen Sie für $u \in C^1(\bar{I}, X)$ die folgenden Aussagen:

- Für $f \in X^*$ wird durch
$$t \mapsto V(t) := \langle f, u(t) \rangle_X$$
eine reellwertige $C^1(\bar{I})$-Funktion definiert und für alle $t \in \bar{I}$ gilt
$$V'(t) = \langle f, u_t(t) \rangle_X.$$
- u ist genau dann konstant, wenn $u_t(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Aufgabe 4 (Vollständigkeit von $C^1(\bar{I}, X)$) (4 Punkte)
Seien t_1, $t_2 \in \bar{I}$ mit $t_1 < t_2$ und $u \in C^1(\bar{I}, X)$. Zeigen Sie, dass

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u_t(t) \,\mathrm{d}t$$

gilt. Folgern Sie, dass $C^1(\bar{I}, X)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{C^1(\bar{I},X)} := \|u\|_{C^0(\bar{I},X)} + \|u_t\|_{C^0(\bar{I},X)}$$

vollständig ist.

Abgabe: Mittwoch, den 02.12.2015 in der Vorlesung