Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Ph. Nägele
Dipl.-Math. J. Daube

09.12.2015

Übung zur Vorlesung

Bochner-Räume

Wintersemester 2015/16 – Blatt 8

Aufgabe 1 (Distributionelle Zeitableitung) (4 Punkte)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und X ein Banachraum. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen.

- Für $u \in C^1(I, X)$ gilt
$$\frac{du}{dt} = \frac{dT_u}{dt} = T_{u_t} = u_t.$$
- Besitzt $u \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$ eine distributionelle Zeitableitung $\frac{du}{dt} \in L^1_{\text{loc}}(I, X)$, so gilt für alle $\eta \in C^\infty(I)$ die Produktregel
$$\frac{d(u\eta)}{dt} = \frac{du}{dt}\eta + u\partial_t \eta.$$

Aufgabe 2 (Schwache und distributionelle Ableitung) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Definieren Sie den Begriff der schwachen Ableitung für Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ unter Verwendung des Begriffs der distributionellen Ableitung. Führen Sie anschließend die Sobolev-Räume $W^{1,q}(\Omega)$ mit Hilfe dieser Definition ein.

Aufgabe 3 (Gelfand-Tripel, Teil 1) (4 Punkte)

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $(H, \|\cdot\|_H)$ ein Hilbertraum mit stetiger und dichter Einbettung $V \hookrightarrow H$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- Die Einschränkung $E : H \cong H^* \to V^*, f \mapsto f|_V$ definiert eine stetige, lineare und injektive Abbildung.
- Falls V reflexiv ist, so liegt $E(H)$ dicht in V^*.

Aufgabe 4 (Gelfand-Tripel, Teil 2) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Zeigen Sie, dass
$$\big(W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,2}(\Omega)\big)$$
ein Gelfand-Tripel ist. Für welche $p \in (1, \infty)$ mit $p' = \frac{p}{p-1}$ ist
$$\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega)\big)$$
ein Gelfand-Tripel?

Abgabe: Mittwoch, den 16.12.2015 in der Vorlesung