

Übung zur Vorlesung
Bochner-Räume
Wintersemester 2015/16 – Blatt 10

Aufgabe 1 (Hölderstetige Banachraum-wertige Funktionen) (4 Punkte)

Für Banachräume X und $0 < \alpha < \beta$ sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^{0,\beta}([0, T]; X)$ eine beschränkte Folge mit

$$f_k \rightarrow f \text{ in } C([0, T]; X) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

für eine Funktion $f \in C([0, T]; X)$. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen.

- $f \in C^{0,\beta}([0, T]; X)$.
- $f_k \rightarrow f$ in $C^{0,\alpha}([0, T]; X)$ für $k \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2 (Fortsetzung durch Spiegelung) (8 Punkte)

Es seien X und Y Banachräume mit $X \subset Y$. Für $u \in L^1(I; X)$ mit $I = [0, T]$ sei durch

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(-t), & t \in (-T, 0), \\ u(t), & t \in [0, T], \\ u(2T - t), & t \in (T, 2T) \end{cases}$$

eine Fortsetzung $\bar{u} : 3I := (-T, 2T) \rightarrow X$ definiert. Beweisen Sie die nachfolgenden Eigenschaften von $\bar{u}$.

- $\bar{u} \in L^1(3I; X)$.
- Falls $u \in L^p(I; X)$ für ein $p \in [1, \infty]$, so gilt $\bar{u} \in L^p(3I; X)$.
- Falls $\frac{d}{dt}u \in L^p(I; Y)$ für ein $p \in [1, \infty]$, so gilt $\bar{u} \in L^p(3I; Y)$ und

$$\frac{d}{dt}\bar{u}(t) = \begin{cases} -\frac{d}{dt}u(-t), & t \in (-T, 0), \\ \frac{d}{dt}u(t), & t \in [0, T], \\ -\frac{d}{dt}u(2T - t), & t \in (T, 2T). \end{cases}$$

Aufgabe 3 (Schwache Form der Wärmeleitungsgleichung) (4 Punkte)

Sei $f \in L^2(I, H)$ und sei $u \in L^2(I, V)$ eine schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$ und alle $v \in V$ gilt

$$-\int_I (u(t), \partial_t \varphi(t))_H v \, dt + \int_I \langle u(t), \varphi(t)v \rangle_V \, dt = \int_I \langle f(t), \varphi(t)v \rangle_V \, dt, \quad (1)$$

wobei H ein geeigneter Hilbertraum und V ein geeigneter Banachraum ist. Spezifizieren Sie die Räume H und V und geben Sie das zugehörige Gelfand-Tripel an. Schließen Sie anschließend aus (1), dass

$$d_t u \in L^2(I, V)^* \cong L^2(I, V^*).$$

Tipp: Die Menge $\{\varphi v : \varphi \in C_0^\infty(I), v \in V\}$ liegt dicht in $L^2(I, V)$.